Localisation homotopique et foncteurs entre espaces vectoriels

Olivier Renaudin

UNIVERSITÉ de NANTES
U.F.R. DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

LOCALISATION HOMOTOPIQUE ET FONCTEURS ENTRE ESPACES VECTORIELS

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue publiquement par

Olivier RENAUDIN

le 20 janvier 2000

Directeur de thèse : Vincent FRANJOU

Rapporteurs :	Bernhard KELLER	Professeur	Université Paris 7
	Randy McCARTHY	Professeur	Université de l'Illinois

Composition du Jury :

Jean-Claude THOMAS	Professeur	Université d'Angers	Président
Bernhard KELLER	Professeur	Université Paris 7	Rapporteur
Vincent FRANJOU	Professeur	Université de Nantes	Directeur de thèse
Nathan HABEGGER	Professeur	Université de Nantes	
Fabien MOREL	Professeur	Université Paris 7	
Teimuraz PIRASHVILI	Professeur	A.M. Razmadze Math. Inst.	

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à Vincent Franjou, pour tout le temps qu'il m'a consacré ces dernières années. Les pages suivantes ne reflètent que pâlement les idées qu'il m'a proposées, sa patience et sa grande disponibilité. Son optimisme fut souvent rassérénant.

J'ai été très honoré que Jean-Claude Thomas accepte de présider le jury. J'espère pouvoir continuer à bénéficier de sa compétence et de son humour à l'avenir.

Je remercie vivement Bernhard Keller et Randy McCarthy d'avoir accepté la charge d'être les rapporteurs de cette thèse, et pour la patience dont ils ont fait preuve à cette occasion.

Le cours de D.E.A. de Fabien Morel en 1998 ajouta un moment enrichissant et enthousiasmant à cette thèse. Je le remercie d'autant plus d'avoir accepté de participer au jury.

Eu égard à l'importance de ces idées dans le domaine dans lequel s'inscrit le travail qui suit, j'ai été particulièrement honoré que Teimouraz Pirashvili veuille bien prendre part au jury.

Je remercie Nathan Habegger d'avoir pris part au jury, ainsi que les membres du département de Mathématiques qui ont bien voulu m'accorder par deux fois un poste d'ATER.

J'ai eu la chance de profiter de la visite de Jeff Smith à Nantes en 1997. Je lui suis très reconnaissant de ces multiples et éclairantes explications et lui suis redevable de nombreuses suggestions.

Je remercie également Laurent Piriou et Geoffrey Powell pour les explications qu'ils m'ont apportées.

Enfin, merci à Brigitte, Colette et Martine pour leur bonne humeur communicative.

Table des matières

Introduction

Les catégories de foncteurs entre A-modules permettent d'exprimer comme groupes d'extensions certaines théories cohomologiques, telles la cohomologie de MacLane [McL2, JP], la cohomologie de Hochschild topologique [Bo, PW], la K-théorie stable, ou la cohomologie des groupes algébriques. Dans le cas $A = \mathbb{F}_p$, ces catégories sont également liées aux modules instables sur l'algèbre de Steenrod (voir, par exemple, [Sc]). Cette approche a permis de nombreux calculs ([FFSS], pour une référence récente).

Pour l'étude de ces catégories on définit le degré polynômial d'un foncteur. Cette notion produit une filtration de la catégorie de tous les foncteurs par les sous-catégories de foncteurs polynômiaux de degré inférieur où égal à n. Celles-ci vérifient des conditions de "recollement", qui ont déjà été utilisées pour l'étude des foncteurs simples.

Dans la suite, on s'intéresse à l'approximation, sous forme de localisation, d'un foncteur par une suite de foncteurs "polynomiaux à homotopie près", selon les idées introduites par J. Smith. Ces idées ont été utilisées dans [FS] pour obtenir un théorème de dualité.

On considère d'abord une catégorie abélienne (localement petite) $\mathcal{A}$ possédant assez de projectifs, et $\mathcal{B}$ une sous-catégorie colocalisante telle que $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ possède assez de projectifs. La catégorie $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{A}$ et le foncteur quotient T possède un adjoint à gauche G :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, shift right, "T"'] & \mathcal{A}/\mathcal{B} \arrow[l, shift right, "G"'] \end{tikzcd}$$

Après prolongement simplicial, la paire (G, T) induit une adjonction entre catégories homotopiques :

$$\begin{tikzcd} Ho(s\mathcal{A}) \arrow[r, shift right, "\tilde{T}"'] & Ho(s(\mathcal{A}/\mathcal{B})) \arrow[l, shift right, "\boldsymbol{L}(G)"'] \end{tikzcd}$$

telle que l'unité de l'adjonction : $Id \longrightarrow (\tilde{T} \circ \boldsymbol{L}(G))$ soit un isomorphisme. On appelle $h\mathcal{B}$ la classe des morphismes induisant un isomorphisme via les foncteurs $[-, \Sigma^q B]$, où $q \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{B}$. Une $h\mathcal{B}$-acyclisation $\mathscr{A}(X) \longrightarrow X$ de X est un morphisme terminal parmi les morphismes de but X et de source un objet annulé par les foncteurs $[-, \Sigma^q B]$. Une $h\mathcal{B}$-localisation $X \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ de X est un morphisme terminal parmi les morphismes de $h\mathcal{B}$ et de source X. On vérifie : (cf. théorème 1.1.6, p.11)

Théorème 0.0.1 *La co-unité d'adjonction :* $(\boldsymbol{L}(G) \circ \tilde{T}) \longrightarrow Id$ *est la* $h\mathcal{B}$*-acyclisation* $(\mathscr{A},\theta)$.

Il existe une $h\mathcal{B}$*-localisation* $(\mathscr{L},\eta)$*, et on a, pour tout* $X \in s\mathcal{A}$*, une suite de cofibration :* $\mathscr{A}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \mathscr{L}(X)$*. De plus,* L *est* $h\mathcal{B}$*-local si et seulement si* $\pi_*(L) \in \mathcal{B}$.

Si la catégorie $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck possèdant un ensemble de petits générateurs projectifs, la $h\mathcal{B}$-localistion s'inscrit dans le cadre d'une structure de catégorie de modèle, avec les définitions suivantes. On appelle $h\mathcal{B}$-équivalence faible (resp. $h\mathcal{B}$-cofibration) un morphisme de $s\mathcal{A}$ appartenant à $h\mathcal{B}$ (resp. une cofibration) et $h\mathcal{B}$-fibration un morphisme ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à toute cofibration de $h\mathcal{B}$. On montre alors : (cf. théorème 1.2.8, p.16)

Théorème 0.0.2 *La catégorie $s\mathcal{A}$ et les classes de $h\mathcal{B}$-équivalences faibles, $h\mathcal{B}$-cofibrations, et $h\mathcal{B}$-fibrations définies ci-dessus constituent une catégorie de modèle fermé.*

On applique ensuite ces remarques à la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs de source une petite catégorie additive $\mathcal{E}$ et de but la catégorie des A-modules.

Soit $\mathcal{F}'^{(n)}$ la catégorie des foncteurs à n variables, nuls dès qu'une variable est nulle. La restriction du foncteur diagonale : $\Delta_n^* : \mathcal{F}'^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}$ possède un adjoint à gauche et à droite : $cr_n : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'^{(n)}$, appelé n-ième déviation (ou cross-effect). Les foncteurs cr_n mesurent le défaut d'additivité des foncteurs de $\mathcal{F}$. Un foncteur $F \in \mathcal{F}$ est dit polynômial de degré inférieur ou égal à n si $cr_{n+1}(F) = 0$, et on note $\mathcal{F}_n$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}$ formée de ces foncteurs.

La filtration $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset ... \subset \mathcal{F}$ induit une tour de localisation :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \mathscr{F}_{n+1}(X) & & \mathscr{F}_n(X) & & & & \mathscr{F}_1(X) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ X & \longrightarrow ... & \mathscr{L}_{n+1}(X) & \longrightarrow & \mathscr{L}_n(X) & \longrightarrow & \mathscr{L}_{n-1}(X) & ... & \mathscr{L}_1(X) & \longrightarrow & \mathscr{L}_0(X) \end{array}$$

où

$$\mathscr{F}_n = \mathscr{A}_{n-1} \circ \mathscr{L}_n$$

et

$$\mathscr{F}_n(X) \longrightarrow \mathscr{L}_n(X) \longrightarrow \mathscr{L}_{n-1}(X)$$

est une suite de cofibration.

Pour étudier les fibres de localisations $\mathscr{F}_n$, on utilise les foncteurs symétriques, c'est-à-dire à valeur invariante par permutation des variables. On peut voir les foncteurs symétriques comme les algèbres sur la monade Sym de $\mathcal{F}'^{(n)}$ définie par :

$$Sym(G)(V_1, ..., V_n) = \bigoplus_{\Sigma_n} G(V_{\sigma(1)}, ..., V_{\sigma(n)})$$

où Σ_n désigne le n-ième groupe symétrique, et $(V_1, ..., V_n) \in \mathcal{E}^n$. On note $\mathcal{S}'^{(n)}$ la catégorie des Sym-algèbres, et $\mathcal{S}'^{(n)}_n$ la sous-catégorie des foncteurs linéaires en chaque variable. La n-ième déviation cr_n est à valeur dans $\mathcal{S}'^{(n)}$. D'autre part, la diagonale $\Delta_n^*(G)$ d'un foncteur symétrique G est munie d'une action de Σ_n. En notant S_n le foncteur :

$$Colim_{\Sigma_n} \circ \Delta_n^* : \mathcal{S}'^{(n)} \to \mathcal{F}^{\Sigma_n} \to \mathcal{F}$$

on a une adjonction :

$$Ho(s\mathcal{F}) \underset{\tilde{cr}_n}{\overset{\boldsymbol{L}(S_n)}{\rightleftarrows}} Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$$

Par ailleurs, il existe une multilinéarisation homotopique ($h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-localisation), notée $\mathscr{M}_n$, dans $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$. Avec ceci, on peut donner une description de la n-ième fibre de localisations, obtenue par B. Johnson et R. McCarthy [JMcC2] : (cf. théorème 2.3.5, p.34)

Théorème 0.0.3 *Pour tout F dans $s\mathcal{F}$, la fibre de localisation $\mathscr{F}_n(F)$ est naturellement isomorphe au foncteur obtenu en prenant les co-invariants homotopiques de la multilinéarisation homotopique de la n-ième déviation de F :*

$$\mathscr{F}_n(F)(V) \simeq (\mathscr{M}_n(F_{(n)})(V, ..., V))_{h\Sigma_n} \ .$$

La catégorie des n-ièmes fibres de localisations, i.e. : des objets $h\mathcal{F}_n$-locaux et $h\mathcal{F}_{n-1}$-acycliques de $Ho(s\mathcal{F})$, est équivalente à celle des $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-locaux de $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$.

On suppose désormais que l'anneau A est commutatif et que $\mathcal{E}$ est la catégorie des A-modules libre de rang fini. La catégorie des foncteurs symétriques multilinéaires $\mathcal{S}'^{(n)}_n$ est alors équivalente à la catégorie des $A[\Sigma_n]$-modules $\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$. On peut exprimer la catégorie des n-ièmes fibres de localisations comme catégorie homotopique de modules simpliciaux sur un anneau simplicial de $\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$.

Soit $Q^{(n)}$ un modèle cofibrant de la $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-localisation du foncteur :

$$\bar{P}^{\boxtimes n} : (V_1, ..., V_n) \mapsto \bar{P}(V_1) \otimes ... \otimes \bar{P}(V_n)$$

où $\bar{P}$ désigne le foncteur “idéal d'augmentation” $\tilde{A}[-]$ de $\mathcal{F}$. Pour $Q^{(1)}$, on peut par exemple choisir la construction cubique de MacLane [McL]. L'espace fonctionnel $Map(-,-)$ de $s\mathcal{F}'^{(n)}$ permet de définir un foncteur :

$$\mathcal{M}^{(n)} = Map(Q^{(n)}, -) : s\mathcal{S}'^{(n)} \longrightarrow s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)})$$

avec $R^{(n)} = Map(Q^{(n)}, Q^{(n)})$. Ce foncteur possède un adjoint à gauche $\mathcal{T}^{(n)}$, et on vérifie : (cf. théorème 3.3.5, p.43)

Théorème 0.0.4 *L'adjonction :*

$$Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)})) \underset{\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}}{\overset{\boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n)})}{\rightleftarrows}} Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$$

se restreint en une équivalence de la catégorie des multilinéaires homotopiques de $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$ avec la catégorie $Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)}))$.

La catégorie des n-ièmes fibres de localisations est donc équivalente à $Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)}))$.

La structure explicite des anneaux simpliciaux $R^{(n)}$ n'est pas connue. Néanmoins dans le cas $A = \mathbb{F}_p$, les groupes d'homotopie ont été calculés. Un résultat de J. Smith montre que l'algèbre $\pi_*(R^{(1)})$ est isomorphe à $\mathcal{A}_*$, l'algèbre duale de l'algèbre de Steenrod. On peut alors vérifier que $\pi_*(R^{(n)})$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{A}_*^{\otimes n}$, où Σ_n agit par permutation des facteurs.

Chapitre 1

Sous-catégorie colocalisante et localisation homotopique

Les premiers paragraphes sont des rappels sur la notion de localisation, en particulier dans les catégories abéliennes. Le but de la première section est de vérifier l'existence de certaines localisations et acyclisations dans la catégorie homotopique associée à une catégorie abélienne. La deuxième section indique que, sous certaines conditions, on a également une structure de catégorie de modèle fermée, où les équivalences faibles sont les morphismes localisants de la première section. La troisième section décrit la construction d'une suite spectrale à partir de la tour de localisations produite par une suite de sous-catégories colocalisantes. Enfin, la quatrième section signale comment la localisation peut être utilisée pour la vérification de certaines dualités entre groupes d'extensions.

1.1 Localisation

1.1.1 Localisation relativement à une classe de morphisme

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{W}$ une classe de morphisme de $\mathcal{C}$.

Définitions : Un objet $L \in \mathcal{C}$ est dit $\mathcal{W}$-*local* si tout morphisme $X \to Y$ de $\mathcal{W}$ induit un isomorphisme $Hom(Y, L) \xrightarrow{\sim} Hom(X, L)$.

Un objet $C \in \mathcal{C}$ est dit $\mathcal{W}$-*colocal* si tout morphisme $X \to Y$ de $\mathcal{W}$ induit un isomorphisme $Hom(C, X) \xrightarrow{\sim} Hom(C, Y)$.

Une *localisation* d'un objet $X \in \mathcal{C}$ est la donnée d'un morphisme $X \to L$ de $\mathcal{W}$ où L est $\mathcal{W}$-local.

Une *colocalisation* d'un objet $X \in \mathcal{C}$ est la donnée d'un morphisme $C \to X$ de $\mathcal{W}$ où C est $\mathcal{W}$-colocal.

Une *monade* (resp. *comonade*) *idempotente* (E, η) [A, B1] est constituée d'un foncteur $E : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et d'une transformation naturelle $\eta : Id_{\mathcal{C}} \to E$ (resp. $\eta : E \to Id_{\mathcal{C}}$) tels que : $E\eta = \eta_E : E \to E^2$ (resp. $E\eta = \eta_E : E^2 \to E$).

Comme il est indiqué dans [B1], la donnée d'une localisation (resp. colocalisation) pour tout objet de $\mathcal{C}$ est équivalente à la donnée d'un foncteur localisation (resp. colocalisation), c'est à dire une monade (resp. comonade) idempotente (E, η) telle que, pour tout objet X de $\mathcal{C}$: $\eta_X \in \mathcal{W}$ et $E(X)$ $\mathcal{W}$-local (resp. $\mathcal{W}$-colocal).

1.1.2 Localisation et colocalisation dans une catégorie abélienne

Il s'agit de rappels de définitions et résultats ([G, Ch.3] ou [P, Ch.4]) concernant les situations localisantes et colocalisantes dans une catégorie abélienne.

Dans toute la suite, les catégories abéliennes seront supposées *localement petites*, i.e. : pour chaque objet, la classe des sous-objets forme un ensemble.

Définition : Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abelienne, $\mathcal{B}$ une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}$ est *localisante* (resp. *colocalisante*) si le foncteur passage au quotient : $T \;: \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ possède un adjoint à droite, noté R (resp. à gauche, noté S).

Dans [G, p.371], il est montré que le foncteur R est alors section de T, au sens où la co-unité d'adjonction est un isomorphime, si bien que l'unité : $u \;: Id_{\mathcal{C}} \to R \circ T$ constitue une monade idempotente. C'est une localisation relative à la classe $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ des morphismes ayant noyau et conoyau dans $\mathcal{B}$. On appelle *$\mathcal{B}$-isomorphisme* les morphismes de $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$.

Les propositions suivantes donnent des caractérisations des sous-catégories localisantes. La première sera utilisée dans le chapitre suivant.

Proposition 1.1.1 *[G, p.372] Soit $\mathcal{B}$ une sous-catégorie épaisse d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathcal{A}$

(ii) Tout objet A de $\mathcal{A}$ contient un sous-objet maximal parmi les sous-objets de A appartenant à $\mathcal{B}$; de plus, si tout sous-objet de A appartenant à $\mathcal{B}$ est nul, il existe un monomorphisme de A dans un objet $\mathcal{B}$-local. □

Proposition 1.1.2 *[P, p.182] Soit $\mathcal{B}$ une sous-catégorie épaisse d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ possédant des enveloppes injectives. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathcal{A}$

(ii) Tout objet A de $\mathcal{A}$ possède un sous-objet maximal dans $\mathcal{B}$.

Si, de plus, la catégorie $\mathcal{A}$ possède des sommes quelconques, ces assertions sont équivalentes à [P, p.186] :

(iii) $\mathcal{B}$ est stable par somme. □

Les énoncés ci-dessus se dualisent, permettant de caractériser les sous-catégories colocalisantes.

Définitions : Un objet U de $\mathcal{A}$ est *générateur* si le foncteur $Hom(U, -)$ est pleinement fidèle. Une catégorie abélienne est une *catégorie de Grothendieck* si elle possède un générateur et des colimites filtrantes exactes.

Exemple : Pour tout anneau A, la catégorie des A-modules $\mathcal{M}od_A$, et la catégorie de foncteurs $(\mathcal{M}od_A)^I$, où I désigne une petite catégorie quelconque, sont des catégories de Grothendieck.

On a dans ce cadre une caractérisation très simple des sous-catégories localisantes :

Proposition 1.1.3 *[NT] Soit une catégorie de Grothendieck $\mathcal{A}$ bicomplète. Toute sous-catégorie colocalisante est alors localisante.*

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ une sous-catégorie colocalisante de $\mathcal{A}$. Elle est épaisse et stable par produits. Dans une catégorie de Grothendieck, la somme d'un ensemble d'objets est un sous-objet du produit de ces objets. La catégorie $\mathcal{B}$ est donc également stable par sommes. □

1.1.3 Objets simpliciaux, chaines, catégorie de modèle fermée

Etant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, $s\mathcal{C}$ désigne la catégorie des objets simpliciaux sur $\mathcal{C}$. Le prolongement simplicial d'un foncteur $F\ :\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ est le foncteur $s\mathcal{C}\to s\mathcal{D}$ obtenu par postcomposition, c'est-à-dire en appliquant F en chaque degré. Il sera également noté F dans la suite.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne localement petite, possédant assez de projectifs, et $\mathcal{B}$ une sous-catégorie colocalisante :

$$\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{A}\xrightarrow{T}\mathcal{A}/\mathcal{B}\ .$$

On note S l'adjoint à gauche du foncteur quotient T : pour tout objet X de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, et pour tout Y de $\mathcal{A}$, il existe un isomorphisme naturel :

$$Hom_{\mathcal{A}}(S(X),Y)\simeq Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(X,T(Y)).$$

L'unité d'adjonction : $Id_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}\to T\circ S$ est alors un isomorphisme [G, p.371].

Cette situation se prolonge simplicialement :

$$s\mathcal{B}\hookrightarrow s\mathcal{A}\xrightarrow{T}s(\mathcal{A}/\mathcal{B}),$$

T et S désignant également les prolongements simpliciaux.

On note $Ch(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes concentrés en degrés positifs. Le foncteur normalisation $N\,:\,s\mathcal{A}\to Ch(\mathcal{A})$ associe à un objet simplicial $A\in s\mathcal{A}$ un complexe $N(A)$ tel que, pour $n\in\mathbb{N}$, $N(A)_n=\cap_{i=1\ldots n}Ker(d_i:A_{n+1}\to A_n)$ et de différentielle $d_0:A_{n+1}\to A_n$. Selon le théorème de Dold-Kan [D], c'est une équivalence de catégorie. On définit, pour $n\in\mathbb{N}$, les foncteurs $\pi_n:s\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ par $\pi_n(A)=H_n(N(A))$, l'homologie du complexe.

On rappelle ci-dessous la définition d'une catégorie de modèle fermée de [DS].

Définition : [DS, p.83] Une catégorie de modèle fermée est une catégorie $\mathcal{C}$ avec trois classes distinguées de morphismes : les *équivalences faibles*, les *fibrations* et les *cofibrations*, chacunes fermées pour la composition et contenant les morphismes identités. Un morphisme qui est à la fois une fibration (resp. cofibration) et une équivalence faible est appelée fibration triviale (resp. cofibration triviale). Ces donnés doivent vérifier les axiomes suivant :

MC1 La catégorie $\mathcal{C}$ possède toute limite finie et toute colimite finie.

MC2 Si f et g sont des morphismes de $\mathcal{C}$ tel que gf est défini et si deux des trois morphismes f, g et gf sont des équivalences faibles, il en est de même de la troisième.

MC3 Si f est un retracte de g et bsi g est est une fibration, une cofibration, ou une équivalence faible, il en est de même de f.

MC4

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i\downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Un relèvement : $B\to X$ existe dans le diagramme ci-dessus dans chacune des deux situations suivantes : (i) i est une cofibration et p est une fibration triviale, ou (ii) i est une cofibration trivialeet p est une fibration.

MC5 Tout morphisme f peut être factorisé de deux manières : (i) $f = pi$, où i est une cofibration et p est une fibration triviale, et (ii) $f = pi$, où i est une cofibration triviale et p est une fibration.

Le fait que la catégorie $s\mathcal{A}$ ait assez de projectifs permet de la munir d'une structure de catégorie de modèle simpliciale fermée [Q, Ch.II, =A7 4].

Les équivalences faibles sont les morphismes transformés en isomorphismes par les foncteurs π_n ($n \in \mathbb{N}$). Les cofibrations sont les injections de conoyau projectif en chaque degré. Les fibrations peuvent être caractérisés comme les morphismes induisant par le foncteur normalisation des surjections en degrés strictement positifs.

Ceci assure l'existence de $Ho(s\mathcal{A})$, la catégorie homotopique associée à $s\mathcal{A}$. L'ensemble des morphismes $X \to Y$ de $Ho(s\mathcal{A})$ est désigné par $[X, Y]$. Le foncteur suspension est noté Σ, son adjoint à droite Ω, et on notera éventuellement, pour $n < 0$: $\Sigma^n = \Omega^{-n}$.

Le diagramme de $Ho(s\mathcal{A}) : X \to Y \to Z$, est appelé suite de cofibration [Q, Ch.I, =A7 3] s'il est isomorphe à un diagramme $A \to B \to C$ de $s\mathcal{A}$, où $A \to B$ est une cofibration entre cofibrants, de cofibre C, c'est-à-dire une suite exacte de cofibrants. Toute suite exacte de $s\mathcal{A}$ est faiblement équivalente à une suite exacte de cofibrants.

1.1.4 Construction de la localisation

Le but de cette section est de vérifier l'existence de localisation et acyclisation homotopique associées à une sous-catégorie colocalisante.

Dans toute ce chapitre, on fait l'hypothèse suivante :
(H) *$\mathcal{A}/\mathcal{B}$ possède assez de projectifs.*

Elle assure l'existence de la structure de catégorie de modèle fermée sur $s(\mathcal{A}/\mathcal{B})$, et donc l'existence de $Ho(s(\mathcal{A}/\mathcal{B}))$.

Cette hypothèse est vérifiée pour toute sous-catégorie colocalisante si $\mathcal{A}$ possède des revêtements projectifs [P, p.182]. Elle le sera également dans le cadre des catégories de foncteurs considerées dans le chapitre suivant.

Proposition 1.1.4 *La paire de foncteurs adjoints (S, T) induit une paire d'adjoints :*

$$Ho(s\mathcal{A}) \underset{\tilde{T}}{\overset{\boldsymbol{L}(S)}{\rightleftarrows}} Ho(s(\mathcal{A}/\mathcal{B}))$$

telle que l'unité de l'adjonction : $Id \to (\tilde{T} \circ \boldsymbol{L}(S))$ soit un isomorphisme.

Démonstration : L'exactitude de T implique que son prolongement simplicial préserve les équivalences faibles. Cela implique également que T préserve les fibrations. D'une part, ceci assure l'existence de $\tilde{T}$. D'autre part, il s'ensuit, par adjonction, que S préserve les cofibrations et les cofibrations triviales. Ce dernier point justifie l'existence de $\boldsymbol{L}(S)$, par le lemme de Brown [DS, p.114] [DHK, p.13]. La préservation des fibrations par T et des cofibrations par S donne l'adjonction $(\boldsymbol{L}(S), \tilde{T})$ [Q, p.4.6].

Pour que l'unité de l'adjonction soit un isomorphisme, il suffit [Q, p.4.6] que l'adjointe d'une équivalence faible $S(X) \xrightarrow{f} Y$, $X \in s(\mathcal{A}/\mathcal{B})$, $Y \in s\mathcal{A}$, soit une équivalence faible

$X \xrightarrow{\check{f}} T(Y)$. Or, le foncteur T préserve les équivalences faibles, et on a : $\check{f} = T(f) \circ u$ où u est l'isomorphisme unité : $Id \to (T \circ S)$. $\square$

Définitions :

1) On appelle $\pi\mathcal{B}$-*équivalence* un morphisme f de $s\mathcal{A}$ tel que $\pi_*(f)$ soit un $\mathcal{B}$-isomorphisme. La classe des $\pi\mathcal{B}$-équivalences est notée $\pi\mathcal{B}$.

2) On appelle $h\mathcal{B}$-*équivalence* un morphisme f de $s\mathcal{A}$ tel que, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $[f, \Sigma^* B]$ soit un isomorphisme. La classe des $h\mathcal{B}$-équivalences est notée $h\mathcal{B}$. Un objet A est dit $h\mathcal{B}$-acyclique si, pour tout $B \in \mathcal{B}$: $[A, \Sigma^* B] = 0$

Proposition 1.1.5 *La co-unité d'adjonction :* $(\boldsymbol{L}(S) \circ \tilde{T}) \to Id$ *constitue une colocalisation par rapport à* $\pi\mathcal{B}$. *Les objets colocaux sont les* $h\mathcal{B}$*-acycliques.*

Démonstration : L'unité de l'adjonction $(\boldsymbol{L}(S), \tilde{T})$ étant un isomorphisme (proposition 1.1.4) la co-unité $(\boldsymbol{L}(S) \circ \tilde{T}) \to Id$ est une comonade idempotente.

Elle définit une colocalisation, par rapport aux morphismes de $Ho(s\mathcal{A})$ transformés en isomorphisme par $\boldsymbol{L}(S) \circ \tilde{T}$, donc ceux transformés en isomorphisme par $\tilde{T}$, car $\tilde{T} \circ \boldsymbol{L}(S) \simeq Id$. Il s'agit donc bien d'une colocalisation par rapport à $\pi\mathcal{B}$ car $\pi_* \circ \tilde{T} \simeq T \circ \pi_*$.

Si A est colocal, $A \simeq (\boldsymbol{L}(S) \circ \tilde{T})(A)$, et donc :

$$[A, \Sigma^* B] \simeq [\boldsymbol{L}(S) \circ \tilde{T}(A), \Sigma^* B] \simeq [\tilde{T}(A), \Sigma^* T(B)] = 0$$

soit A $h\mathcal{B}$-acyclique.

Réciproquement, soit A un $h\mathcal{B}$-acyclique. Par définition, A est colocal si et seulement si, pour tout $f \in \pi\mathcal{B}$, $[A, f]$ est un isomorphisme. Il suffit alors de considérer le cas où $f \in \pi\mathcal{B}$ est une cofibration de $s\mathcal{A}$. Sa cofibre C_f vérifie alors : $\pi_*(C_f) \in \mathcal{B}$. Comme A est $h\mathcal{B}$-acycliques, en particulier pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $[A, \Sigma^n \pi_k(C_f)] = 0$. Notons P_k le k-ième étage de la tour de Postnikov de C_f. Par récurrence, la suite exacte longue associée à la suite de cofibration : $\Sigma^k \pi_k(C_f) \to P_k \to P_{k-1}$ montre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[A, \Sigma^n P_k] = 0$. Comme $C_f \simeq Lim_k P_k$, une suite exacte courte de Milnor :

$$0 \to Lim^1_k [A, \Sigma^{n-1} P_k] \to [A, \Sigma^n C_f] \to Lim_k [A, \Sigma^n P_k] \to 0$$

montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $[A, \Sigma^n C_f] = 0$. La suite exacte longue associée à la suite exacte courte : $0 \to X \xrightarrow{f} Y \to C_f \to 0$ montre enfin que $[A, f]$ est un isomorphisme. $\square$

Définition : Une $h\mathcal{B}$-*acyclisation* d'un objet X de $Ho(s\mathcal{A})$ est la donnée d'un $h\mathcal{B}$-acyclique A et d'un morphisme $A \to X$ terminal parmi les morphismes de source $h\mathcal{B}$-acyclique et de but X.

La donnée d'une $h\mathcal{B}$-acyclisation pour tout X de $Ho(s\mathcal{A})$ est équivalente à la donnée d'un foncteur $h\mathcal{B}$-acyclisation, soit un couple $(\mathscr{A},\theta)$, où θ est une transformation naturelle : $\mathscr{A} \to Id$, tel que, pour tout X de $Ho(s\mathcal{A})$, $\mathscr{A}(X) \to X$ soit une $h\mathcal{B}$-acyclisation de X.

Le théorème suivant donne l'existence de la $h\mathcal{B}$-acyclisation et de la $h\mathcal{B}$-localisation, et donne une caractérisation des objets $h\mathcal{B}$-locaux.

Théorème 1.1.6 *La co-unité d'adjonction :* $(\boldsymbol{L}(S) \circ \tilde{T}) \to Id$ *est la* $h\mathcal{B}$*-acyclisation* $(\mathscr{A},\theta)$.

Il existe une $h\mathcal{B}$*-localisation* $(\mathscr{L},\eta)$, *et on a, pour tout* $X \in s\mathcal{A}$, *une suite de cofibration :* $\mathscr{A}(X) \to X \to \mathscr{L}(X)$.

De plus, L *est* $h\mathcal{B}$*-local si et seulement si* $\pi_*(L) \in \mathcal{B}$.

Démonstration : D'après la proposition 1.1.5, $(\boldsymbol{L}(S)\circ\tilde{T})\to Id$ est la $\pi\mathcal{B}$-colocalisation, et vérifie donc, pour tout X de $Ho(s\mathcal{A})$, la propriété universelle : $(\boldsymbol{L}(S)\circ\tilde{T})(X)\to X$ est terminal parmi les morphismes de source $\pi\mathcal{B}$-colocal et de but X. En utilisant l'équivalence entre $\pi\mathcal{B}$-colocaux et $h\mathcal{B}$-acycliques, celle-ci devient : $(\boldsymbol{L}(S)\circ\tilde{T})(X)\to X$ est terminal parmi les morphismes de source $h\mathcal{B}$-acyclique et de but X, ce qui démontre la première assertion.
On suit la méthode de [B3] pour construire la localisation. Soit L la cofibre homotopique de $(\boldsymbol{L}(S)\circ\tilde{T})(X)\to X$. La suite exacte longue induite par la suite de cofibration :
$(\boldsymbol{L}(S)\circ\tilde{T})(X)\to X\to L$ montre que $X\to L$ est $h\mathcal{B}$-localisante.
Une suite de cofibration peut être représentée par une suite exacte courte. Par la suite exacte longue d'homotopie et la proposition 1.1.5 : $\pi_*(L)\in\mathcal{B}$. Soit $f\in h\mathcal{B}$. Par définition , pour tout $B\in\mathcal{B}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $[f,\Sigma^n B]$ est un isomorphisme. Donc, par les tours de Postnikov, $[f,L]$ est un isomorphisme pour tout $L\in Ho(s\mathcal{A})$ vérifiant $\pi_*(L)\in\mathcal{B}$. Ceci implique que L est $h\mathcal{B}$-local. Le morphisme $X\to L$ est donc bien une $h\mathcal{B}$-localisation. Ceci permet de définir la pair $(\mathscr{L},\eta)$.
On vient de voir que si $\pi_*(L)\in\mathcal{B}$, alors L est $h\mathcal{B}$-local. Réciproquement, le foncteur $h\mathcal{B}$-localisation $\mathscr{L}$ ainsi construit prenant comme valeurs les objets A tel que $\pi_*(A)\in\mathcal{B}$, les objets $h\mathcal{B}$-locaux vérifient cette propriété. □

Remarque : Les considérations ci-dessus sont également valables dans la catégorie Ch($\mathcal{A}$) des complexes de chaines bornés inférieurement.

1.2 Structure de catégorie de modèle localisée

Il s'agit d'obtenir une structure de catégorie de modèle fermée avec $h\mathcal{B}$ comme classe d'équivalence. L'essentiel de la section est consacré à la construction d'une factorisation. Ceci sera effectué sous les hypothèses détaillées ci-dessous.

1.2.1 Hypothèses et remarques

$\mathcal{A}$ désigne une catégorie de Grothendieck bicomplète, possédant assez de projectifs. De plus, $\mathcal{A}$ possède un ensemble $\{U_i\}_{i\in I}$ de petits générateurs projectifs, U_i petit signifiant que $Hom(U_i,-)$ commute avec toute colimite. En particulier, toute flèche de U_i dans une somme se factorise par une sous-somme finie. On note $U=\bigoplus_I U_i$; c'est un générateur projectif de $\mathcal{A}$.
Soit $\mathcal{B}$ une sous-catégorie colocalisante de $\mathcal{A}$, tel que $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ possède assez de projectifs.

Toutes les hypothèses de la section precédente sont ainsi vérifiées.

Comme $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck, $\mathcal{B}$ est également localisante, d'après la proposition 1.1.3, et le foncteur T préserve générateurs et toute colimite [P]. Soit U' un générateur projectif dans $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, et $V=S(U')$. L'objet V est projectif, $\mathcal{B}$-colocal.

Les foncteurs : $\mathrm{E}_i=(Hom(U_i,-)\circ\pi_*)\ :s\mathcal{A}\to$Ab commutent donc aux colimites, et procurent une caractérisation des équivalences faibles :

$$\bigcap_I \mathrm{E}_i^{-1}(\{isomorphismes\})=\{\acute{e}quivalencesfaibles\}$$

.

Définition : Soit A un objet de $\mathcal{A}$. Un projectif de $\mathcal{A}$ est dit A-*libre* s'il est isomorphe à une somme de A. Un cofibrant de $s\mathcal{A}$ est dit A-*libre* s'il est A-libre en chaque degré. Une cofibration de $s\mathcal{A}$ est dite A-*libre* si sa cofibre est libre.

Lemme 1.2.1 *Toute cofibration (resp.dans $h\mathcal{B}$) de $s\mathcal{A}$ est rétracte d'une cofibration U-libre (resp.dans $h\mathcal{B}$).* □

Proposition 1.2.2 *Soit V le projectif $\mathcal{B}$-colocal défini ci-dessus. Un cofibrant C de $s\mathcal{A}$ est $h\mathcal{B}$-acyclique si et seulement s'il existe une équivalence faible : $C' \to C$ dans $s\mathcal{A}$, où C' est un cofibrant V-libre.*

Démonstration : D'après le théorème 1.1.6, $C \in s\mathcal{A}$ est $h\mathcal{B}$-acyclique si et seulement si $(\boldsymbol{L}(S) \circ \tilde{T})(C) \to C$ est un isomorphisme dans $Ho(s\mathcal{A})$. Il existe $\bar{C}' \in \mathcal{A}/\mathcal{B}$ cofibrant U'-libre, ainsi qu'une équivalence faible $\bar{C}' \to T(C)$, et donc tels que : $\boldsymbol{L}(S)(\tilde{T}(C)) \simeq S(\bar{C}')$. Posant $C' = S(\bar{C}')$, le morphisme entre cofibrants : $C' \simeq (\boldsymbol{L}(S) \circ \tilde{T})(C) \to C$ de $Ho(s\mathcal{A})$ provient donc de $s\mathcal{A}$, et $C' \to C$ est une équivalence faible si et seulement si C est $h\mathcal{B}$-acyclique. □

1.2.2 Factorisation

Définition : Soit β un cardinal. Un objet $A \in \mathcal{A}$ est dit β-petit s'il est quotient de l'objet libre : $(\bigoplus_J U)$, avec $|\, J \,| \leq \beta$. Un complexe $A \in$Ch$(\mathcal{A})$ est β-petit s'il l'est en chaque degré. Un morphisme de Ch$(\mathcal{A})$ est β-petit si sa source et son but le sont.

Soient α le plus petit cardinal infini superieur à $|\, I \,|$, et γ tel que V soit γ-petit. Les flèches de U_i dans une somme se factorisant par des sous-sommes finies, celles de source U se factorisent par des sous-sommes de cardinal inférieur à α, et donc celles de source V se factorisent par des sous-sommes de cardinal inférieur à max(α,γ).
Soit ρ le cardinal max(α,γ).

Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un ensemble d'objets de $s\mathcal{A}$. On appelle sous-somme de $\oplus_{i\in I} A_i$ un objet de la forme $\oplus_{i\in J} A_i$, où J est un sous-ensemble de I. On a un injection évidente : $\oplus_{i\in J} A_i \hookrightarrow \oplus_{i\in I} A_i$.

Lemme 1.2.3 *Tout morphisme $C' \xrightarrow{f} C$ avec C' V-libre et C U-libre est colimite filtrante de ses sous-morphismes ρ-petit, de source et but sous-somme en chaque degré.*

Démonstration : Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \simeq (\bigoplus_{i \in I_n} U)$, un isomorphisme fixé. Soit A_n l'ensemble des parties finies de I_n, et $A = (\coprod_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. Soit, pour tout $\alpha \in A$, le sous-complexe de C :

$$\text{Si } \alpha \in A_k \ : \ C_n^\alpha = \begin{cases} 0 & n > k \\ (\bigoplus_\alpha U) & n = k \\ \text{plus petite sous-somme contenant } Im(d_k) & n < k \end{cases}$$

où $d_k : C_{k+1} \to C_k$ désigne la différentielle. Avec ces définitions : $C \simeq Colim_{\alpha\in A} C^\alpha$.
De même, en utilisant des notations similaires, on a : $C' \simeq Colim_{\beta\in B} C'^\beta$.
Soit, pour tout $\beta \in B$, $f^\beta = f_{|C'^\beta} \ : C'^\beta \to IC^\beta$, où IC^β désigne le plus petit sous-complexe de C sous-somme en chaque degré contenant $f(C'^\beta)$.

Les complexes $C^{\alpha}, C'^{\beta}, IC^{\beta}$ ainsi constitués sont ρ-petits par construction. Soit, pour tout $\alpha \in A$, $f^{\alpha}\ : 0 \to C^{\alpha}$. Le diagramme de sous-morphismes $\{f^i\}_{i\in(A\cup B)}$ a les propriétés requises. □

Soit $d_{\alpha} = sup\{card(\mathrm{E}_i(A)) \ / \ i \in I,\ A\ U\text{-libre ou } V\text{-libre},\ \alpha\text{-petits}\}$.
On definit par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$:
- $\alpha_o = \rho$
- $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha.(\rho.\mathrm{d}_{\alpha_{k-1}})$, si $k > 0$

Soit c=$sup\{\alpha_k / \ k \in \mathbb{N}\}$

Proposition 1.2.4 *Soit C un cofibrant libre non nul de $Ch(\mathcal{A})$, $h\mathcal{B}$-acyclique. Il existe un sous-complexe non nul D c-petit, cofibrant libre, $h\mathcal{B}$-acyclique, et en chaque degré sous-somme de C.*

Démonstration : Le principe de cette démonstration est du à Jeffrey Smith.

Pour construire D, on considère le diagramme donné par le lemme 1.2.3 pour la flèche associée à C par la proposition 1.2.2.
Soit un sous-morphisme $f^{\alpha_o}\ : C'^{\alpha_o} \to C^{\alpha_o}$, tel que : $C^{\alpha_o} \neq 0$. Il s'inscrit dans le diagramme commutatif, où, pour tout $i \in I$, $\mathrm{E}_i(f)$ est un isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}_i(C') & \xrightarrow{\mathrm{E}_i(f)} & \mathrm{E}_i(C) \\ \mathrm{E}_i(j_{\alpha_o}) \uparrow & & \uparrow \mathrm{E}_i(i_{\alpha_o}) \\ \mathrm{E}_i(C'^{\alpha_o}) & \xrightarrow{\mathrm{E}_i(f^{\alpha_o})} & \mathrm{E}_i(C^{\alpha_o}) \end{array}$$

$i_{\alpha_o}\ : C^{\alpha_o} \to C$ (resp. $j_{\alpha_o}\ : C'^{\alpha_o} \to C'$) désignant l'injection canonique.

Soient $i \in I$ et $x \in \mathrm{E}_i(C'^{\alpha_o})$ tels que : $\mathrm{E}_i(f^{\alpha_o})(x) = 0$.
Comme $\mathrm{E}_i(f) \circ \mathrm{E}_i(j_{\alpha_o}) = \mathrm{E}_i(i_{\alpha_o}) \circ \mathrm{E}_i(f^{\alpha_o})$ et $\mathrm{E}_i(f)$ est injectif, $\mathrm{E}_i(j_{\alpha_o})(x) = 0$.
Par l'isomorphisme : $\mathrm{E}_i(f) \simeq Colim_{\alpha}\mathrm{E}_i(f^{\alpha})$, il existe C'^{β_x} et $j_{\alpha_o}^{\beta_x}\ : C'^{\alpha_o} \to C'^{\beta_x}$ factorisant j_{α_o} tels que : $\mathrm{E}_i(j_{\alpha_o}^{\beta_x})(x) = 0$.

Soient $i \in I$ et $y \in \mathrm{E}_i(C^{\alpha_o})$ tels que : $y \notin Im(\mathrm{E}_i(f^{\alpha_o}))$.
Comme $\mathrm{E}_i(f)$ est surjectif, il existe $z \in \mathrm{E}_i(C')$ tel que : $\mathrm{E}_i(f)(z) = \mathrm{E}_i(i_{\alpha_o})(y)$. Il existe donc $f^{\delta}\ : C'^{\delta} \to C^{\delta}$ et $z' \in C'^{\delta}$ tel que : $\mathrm{E}_i(j_{\delta})(z') = z$.
D'ou : $\mathrm{E}_i(i_{\delta})(\mathrm{E}_i(f^{\delta})(z')) = \mathrm{E}_i(i_{\delta})(\mathrm{E}_i(i^{\delta}_{\alpha_o})(y))$.
Donc il existe γ_y tel que : $\mathrm{E}_i(i_{\delta}^{\gamma_y})(\mathrm{E}_i(f^{\delta})(z')) = \mathrm{E}_i(i_{\delta}^{\gamma_y})(\mathrm{E}_i(i^{\delta}_{\alpha_o})(y)) = \mathrm{E}_i(i^{\gamma_y}_{\alpha_o})(y)$. Donc : $\mathrm{E}_i(i^{\gamma_y}_{\alpha_o})(y) = \mathrm{E}_i(f^{\gamma_y})(\mathrm{E}_i(j^{\gamma_y}_{\alpha_o})(z'))$, soit : $\mathrm{E}_i(i^{\gamma_y}_{\alpha_o})(y) \in Im(\mathrm{E}_i(f^{\gamma_y}))$.

Soit $f_1\ : D'_1 \to D_1 = Colim_{j\in J_1}\{f^j\}$ où $J_1 = \{\alpha_o, \beta_x, \gamma_y\}_{x,y}$

De façon similaire, on construit par récurrence, pour $k > 0$: $f_k\ : D'_k \to D_k$ à partir de f_{k-1}. Soit $f_{\infty} = Colim_{\mathbb{N}} f_k$.

$f_{\infty}\ : D'_{\infty} \to D_{\infty}$ est c-petit, de par les constructions de D'_{∞} et D_{∞} et la définition de c. De plus, f_{∞} est une équivalence faible, car, pour tout $i \in I$, $\mathrm{E}_i(f_{\infty})$ est un isomorphisme. $D = D_{\infty}$ est le sous-objet annoncé. □

Corollaire 1.2.5 *Soit $A \hookrightarrow B$ une cofibration libre de $h\mathcal{B}$ tel que $B/A \neq 0$. Il existe un objet c-petit $S \in Ch(\mathcal{A})$ tel que $S \subset B$, $S \not\subset A$. De plus, le morphisme $S \cap A \hookrightarrow S$ est une cofibration libre de $h\mathcal{B}$ tel que $S/(S\cap A)$ s'identifie en chaque degré à une sous-somme de B/A.* □

Lemme 1.2.6 *Soit $f\ : X \to Y$ un morphisme de Ch($\mathcal{A}$) ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les cofibrations libres de $h\mathcal{B}$ entre objets c-petits. Alors f a la propriété de relèvement à droite par rapport à toute cofibration de $h\mathcal{B}$.*

Démonstration : C'est essentiellement une démonstration de [B1].

D'après le lemme 1.2.1, il suffit de vérifier la propriété de relèvement par rapport aux cofibrations libres de $h\mathcal{B}$. Soit $i\ : A \hookrightarrow B$ une cofibration libre de $h\mathcal{B}$, et une flèche :

$$\begin{array}{ccc} A & \stackrel{k}{\to} & X \\ i\downarrow & & \downarrow f \\ B & \stackrel{l}{\to} & Y \end{array}$$

Fixons, pour chaque $q \in \mathbb{N}$, un isomorphisme : $(B/A)_q \simeq (\bigoplus_{i\in I^q} U)$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des paires (M, k^M) de Ch($\mathcal{A}$) telles que :

(i) $A \hookrightarrow M$ et $M \hookrightarrow B$ soient des cofibrations libres de $h\mathcal{B}$,

(ii) Pour tout $q \in \mathbb{N}$: $(B/A)_q \simeq (\bigoplus_{i\in I^q_M} U) \stackrel{p_q}{\to} (\bigoplus_{i\in I^q} U) \simeq (B/M)_q$, avec $I^q_M \subset I^q$, est la projection canonique,

(iii) le diagramme commute : $\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & M & \hookrightarrow & B \\ k\downarrow & \swarrow & & & \downarrow l \\ X & & \stackrel{f}{\longrightarrow} & & Y \end{array}$

L'ensemble $\mathcal{P}$ est non vide car il contient (A, k).

$\mathcal{P}$ est muni d'une relation d'ordre : $(M, k^M) \geq (N, k^N)$ si $N \subset M$ ($I^q_N \subset I^q_M$) et $k^M_{|N} = k^N$.

Soit $\mathcal{C}$ une chaine dans $\mathcal{P}$ et $M_{aj} = Colim_{\mathcal{C}} M,\ k_{aj} = Colim_{\mathcal{C}} k^M$.

On a : $(B/M_{aj})_q \simeq (B_q/Colim_{\mathcal{C}} M_q) \simeq Colim(B/M)_q \simeq (\bigoplus_{i\in J^q} U) \subset (B/A)_q$, où $J^q = \bigcap_{\mathcal{C}} I^q_M \subset I^q$. Donc B/M_{aj} est cofibrant et $M_{aj} \hookrightarrow B$ une cofibration libre. De plus, B/M_{aj} est $h\mathcal{B}$-acyclique comme colimite $h\mathcal{B}$-acycliques, d'où $M_{aj} \hookrightarrow B$ est une cofibration libre de $h\mathcal{B}$. $A \hookrightarrow M_{aj}$ en est donc une également. Ainsi, (M_{aj}, k_{aj}) est un majorant de $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{P}$ possède un élément maximal (M_{ax}, k_{ax}).

Si $M_{ax} \neq B$, le corollaire 1.2.5 implique l'existence d'une cofibration libre de $h\mathcal{B}$: $S \cap M_{ax} \hookrightarrow M_{ax}$, et donc, par hypothèse, d'une flèche : $k_S\ : S \to X$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{cccc} & S\cap M_{ax} & \hookrightarrow & S \\ k_{ax|S\cap M_{ax}} & \downarrow & \swarrow & \downarrow l_{|S} \\ & X & \stackrel{f}{\longrightarrow} & Y \end{array}$$

Donc $(S \cup M_{ax}, k^S \cup k_{ax}) \in \mathcal{P}$ et $(S \cup M_{ax}, k^S \cup k_{ax}) > (M_{ax}, k_{ax})$. Cette contradiction montre que : $M_{ax} = B$. $\square$

Théorème 1.2.7 *[B1] Soit $f\ : X \to Y$ un morphisme de Ch($\mathcal{A}$). Il existe une factorisation naturelle de f : $X \stackrel{i}{\hookrightarrow} L_f \stackrel{u}{\to} Y$ où i est une cofibration de $h\mathcal{B}$, et u a la propriété de relèvement à droite par rapport à toute cofibration de $h\mathcal{B}$.* $\square$

1.2.3 Catégorie de modèle

Définitions : Soit f un morphisme de $s\mathcal{A}$:

- f est une $h\mathcal{B}$-cofibration si f est une cofibration

- f est une $h\mathcal{B}$-équivalence faible si $f \in h\mathcal{B}$, c'est-à-dire : pour tout $B \in \mathcal{B}$, $[f, \Sigma^* B]$ est un isomorphisme.

- f est une $h\mathcal{B}$-fibration si et seulement si f a la propriété de relèvement à droite par rapport à toute cofibration de $h\mathcal{B}$.

Les cofibrants sont donc encore les objets projectifs en chaque degré.

Théorème 1.2.8 *La catégorie $s\mathcal{A}$ et les classes de $h\mathcal{B}$-équivalences faibles, $h\mathcal{B}$-cofibrations, et $h\mathcal{B}$-fibrations définies ci-dessus constituent une catégorie de modèle fermé.*

Démonstration : L'existence de la factorisation (axiome MC5(ii) de la liste de [DS] rappelé à la section 1.1.3) est assurée par le théorème 1.2.7, et le reste est standard [B1, B2]. □

1.3 Filtration et suite spectrale

Pour cette section, on revient aux hypothèses de la section 1 : $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne (localement petite) avec suffisament de projectifs.

1.3.1 Préliminaire

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux sous-catégories colocalisantes de $\mathcal{A}$ vérifant les hypothèses de la section 1. En particulier, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ possèdent assez de projectifs.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, la catégorie $\mathcal{B}/\mathcal{C}$ est une sous-catégorie colocalisante de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$. La catégorie quotient est alors équivalente à $\mathcal{A}/\mathcal{B}$. On note $(S_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}, T_{\mathcal{B}/\mathcal{C}})$ la paire d'adjoints associée. On a un diagramme :

$$Ho(s\mathcal{A})$$

$$Ho(s(\mathcal{A}/\mathcal{C})) \underset{\tilde{T}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}}{\overset{\boldsymbol{L}(S_{\mathcal{B}/\mathcal{C}})}{\leftrightarrows}} Ho(s(\mathcal{A}/\mathcal{B}))$$

Ceci produit une $h(\mathcal{B}/\mathcal{C})$-acyclisation $\mathscr{A}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}} = \boldsymbol{L}(S_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}) \circ \tilde{T}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}$ et une $h(\mathcal{B}/\mathcal{C})$-localisation $\mathscr{L}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}$.

Proposition 1.3.1 *Soit $A \in Ho(s\mathcal{A})$. L'image par $\tilde{T}_{\mathcal{C}} : Ho(s\mathcal{A}) \longrightarrow Ho(s(\mathcal{A}/\mathcal{C}))$ de la suite de cofibration : $\mathscr{A}_{\mathcal{B}}(A) \longrightarrow A \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathcal{B}}(A)$ est la suite de cofibration : $\mathscr{A}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}(\tilde{T}_{\mathcal{C}}(A)) \longrightarrow \tilde{T}_{\mathcal{C}}(A) \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}(\tilde{T}_{\mathcal{C}}(A))$.*

En particulier, on a des isomorphismes naturels :
$\tilde{T}_{\mathcal{C}} \circ \mathscr{A}_{\mathcal{B}} \simeq \mathscr{A}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}} \circ \tilde{T}_{\mathcal{C}}$ *et* $\tilde{T}_{\mathcal{C}} \circ \mathscr{L}_{\mathcal{B}} \simeq \mathscr{L}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}} \circ \tilde{T}_{\mathcal{C}}$.

Démonstration : Le foncteur $\tilde{T}_{\mathcal{C}}$ transforme les suites de cofibration en suites de cofibration. Il suffit de vérifier qu'il préserve locaux et acycliques.

D'une part, $\pi_*((\tilde{T}_{\mathcal{C}} \circ \mathscr{L}_{\mathcal{B}})(A)) \simeq T_{\mathcal{C}}(\pi_*(\mathscr{L}_{\mathcal{B}}(A)))$ appartient à l'image de $\mathcal{B}$ par $T_{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire $(\mathcal{B}/\mathcal{C})$. D'autre part, on a les isomorphismes :
$\tilde{T}_{\mathcal{C}} \circ \mathscr{A}_{\mathcal{B}} = \tilde{T}_{\mathcal{C}} \circ \boldsymbol{L}(S_{\mathcal{B}}) \circ \tilde{T}_{\mathcal{B}} \simeq \tilde{T}_{\mathcal{C}} \circ \boldsymbol{L}(S_{\mathcal{C}}) \circ \boldsymbol{L}(S_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}) \circ \tilde{T}_{\mathcal{B}} \simeq \boldsymbol{L}(S_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}) \circ \tilde{T}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}} \circ \tilde{T}_{\mathcal{B}} = \mathscr{A}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}} \circ \tilde{T}_{\mathcal{C}}$.
□

1.3.2 Suite spectrale de localisation

Soit $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in N}$ une suite croissante de sous-catégories de $\mathcal{A}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{A}_n \hookrightarrow \mathcal{A}$ soient colocalisantes, $\mathcal{A}/\mathcal{A}_n$ possédant assez de projectif.

Les foncteurs $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{L}_n$ désignent respectivement la $h\mathcal{A}_n$-acyclisation et la $h\mathcal{A}_n$-localisation. Soit $\mathscr{F}_n$ le foncteur composé $\mathscr{A}_{n-1} \circ \mathscr{L}_n$.

Pour tout $X \in s\mathcal{A}$, $\mathscr{L}_{n-1}(X)$ est isomorphe dans $Ho(s\mathcal{A})$ à la cofibre homotopique de $\mathscr{F}_n(X) \to \mathscr{L}_n(X)$, ce qui permet de construire une tour de fibrations :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & \mathscr{F}_{n+1}(X) & & \mathscr{F}_n(X) & & & \mathscr{F}_1(X) & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ X & \longrightarrow & \ldots & \mathscr{L}_{n+1}(X) & \longrightarrow & \mathscr{L}_n(X) & \longrightarrow & \mathscr{L}_{n-1}(X) \ \ldots & \mathscr{L}_1(X) & \longrightarrow & \mathscr{L}_0(X) \end{array}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_n(X) \to \mathscr{L}_n(X) \to \mathscr{L}_{n-1}(X)$ est une suite de cofibration.

Proposition 1.3.2 *Soient $X, Y \in s\mathcal{A}$. La situation ci-dessus donne lieu à une suite spectrale à deux quadrants :*

$$E_1^{p,q} = [\mathscr{F}_p(X), \Sigma^q Y] \Longrightarrow Colim_n[\mathscr{L}_n(X), \Sigma^q Y]$$

de différentielle d_r de bidegré $(-r, 1)$.

Démonstration : On note : $L_p = \mathscr{L}_p(X),\ F_p = \mathscr{F}_p(X)$.

Via les suites exactes longues de cohomologie produites par les suites de cofibration, la tour de localisation génère un couple exact :

$$\begin{array}{ccccl} D^{p,q} & \xrightarrow{i} & D^{p+1,q} & & D^{p,q} = [L_p, \Sigma^q Y] \\ & & \downarrow j & & E^{p,q} = [F_p, \Sigma^q Y] \\ D^{p,q+1} & \xleftarrow{k} & E^{p+1,q} & & d = j \circ k \ : (-1, 1) \end{array}$$

et donc une suite spectrale, avec : $E_r^{p,q} = (E^{p,q})^{(r)},\ d_r = j^r \circ k^r \ : (-r, 1)$.

On utilise les notations de [McC, p.39].

On a une suite exacte courte :

$$0 \to D^{p,q}/(Ker(i^r \ : D^{p,q} \to D^{p+r,q}) + i(D^{p-1,q})) \to E_{r+1}^{p,q}$$
$$\to Im(i^r \ : D^{p-r,q+1} \to D^{p-1,q+1}) \cap Ker(i \ : D^{p-1,q+1} \to D^{p,q+1}) \to 0$$

Si $r > p$, $D^{p-r,q} = 0$ et donc :

- d'une part, $Z_\infty^{p,q} = k^{-1}(\cap_r Im(i^{r-1} \ : D^{p-r,q+1} \to D^{p-1,q+1}))$
$$= k^{-1}(0) = Ker(k) = j(D^{p,q})\,;$$
- d'autre part, pour tout $r > p$: $Im(i^r \ : D^{p-r,q+1} \to D^{p-1,q+1}) = 0$, d'où :
$$D^{p,q}/(Ker(i^r \ : D^{p,q} \to D^{p+r,q}) + i(D^{p-1,q})) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}^{p,q}.$$

Ainsi : $E_\infty^{p,q} \simeq Colim_{r>p}\{E_{r+1}^{p,q} \to E_r^{p,q}\} \simeq D^{p,q}/(\cup_r Ker(i^r) + i(D^{p-1,q}))$.

Soit : $D^{\infty,q} = Colim\{D^{p,q} \xrightarrow{i} D^{p+1,q}\} = Colim\{[L_p, \Sigma^q Y]$, l'aboutissement de la suite spectrale. On définit la filtration $(\Phi_p(D^{\infty,q}))_{p\in\mathbb{N}}$ de $D^{\infty,q}$ par $\Phi_p(D^{\infty,q}) = Im(D^{p,q} \to D^{\infty,q})$. C'est une filtration croissante et exhaustive : $Colim_p\Phi_p(D^{\infty,q}) \ \simeq \ D^{\infty,q}$.

Soit $K_q^p = Ker(D^{p,q} \to D^{\infty,q}) \simeq \cup_r Ker(i^r \ : D^{p,q} \to D^{p+r,q})$. On a alors un diagramme de suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K_q^{p-1} & \to & D^{p-1,q} & \to & \Phi_{p-1}(D^{\infty,q}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & K_q^p & \to & D^{p,q} & \to & \Phi_p(D^{\infty,q}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & K_q^p/i(K_q^{p-1}) & \to & D^{p,q}/i(D^{p-1,q}) & \to & \Phi_p(D^{\infty,q})/\Phi_{p-1}(D^{\infty,q}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Celui-ci montre que : $\Phi_p(D^{\infty,q})/\Phi_{p-1}(D^{\infty,q}) \simeq D^{p,q}/(i(D^{p-1,q}) + K_q^p)$ et donc : $E_\infty^{p,q} \simeq \Phi_p(D^{\infty,q})/\Phi_{p-1}(D^{\infty,q})$. $\square$

Remarque : On note l_p la $h(\mathcal{A}_p/\mathcal{A}_{p-1})$-localisation de $Ho(\mathcal{A}/\mathcal{A}_{p-1})$: $\mathscr{L}_{(\mathcal{A}_p/\mathcal{A}_{p-1})}$.
La section précédente donne un isomorphisme :
$E_1^{p,q} = [\mathscr{F}_p(X), \Sigma^q Y] \simeq [l_p(\tilde{T}_{p-1}(X)), \Sigma^q \tilde{T}_{p-1}(Y)]_{(\mathcal{A}/\mathcal{A}_{p-1})}$.

1.4 Dualité

Dans cette section, on reproduit une application (cf. [FS]) des méthodes de localisations aux questions de dualités entre groupes d'extensions.

A nouveau, on considère dans cette section une catégorie $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses de la section 1 : $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne (localement petite) avec suffisament de projectifs.

Soient D un objet de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{B}(D)$ une sous-catégorie colocalisante de $\mathcal{A}$ contenant D, telle que $\mathcal{A}/\mathcal{B}(D)$ possède assez de projectifs.

Soient R un anneau, et $\check{R}$ un R-module injectif.

Soient $\check{D} \in s\mathcal{A}$, N un entier naturel et un morphisme de R-module $[\check{D}, \Sigma^N D] \to \check{R}$. On considère, pour tout $A \in s\mathcal{A}$: $[A, \Sigma^k D] \to ([\check{D}, \Sigma^{N-k} A])^*$, le morphisme adjoint de la composée : $[\check{D}, \Sigma^{N-k} A] \otimes [A, \Sigma^k D] \to [\check{D}, \Sigma^N D] \to \check{R}$.

Théorème 1.4.1 *Les assertions I et II sont équivalentes :*
(I)(a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $B \in \mathcal{B}(D)$, on a : $[B, \Sigma^k D] \xrightarrow{\sim} ([\check{D}, \Sigma^{N-k} B])^*$
(b) et pour tout $A \in s\mathcal{A}$, $h\mathcal{B}(D)$-acyclique, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $([\Sigma^k \check{D}, A])^* = 0$

(II) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $A \in s\mathcal{A}$, on a : $[A, \Sigma^k D] \xrightarrow{\sim} ([\check{D}, \Sigma^{N-k} A])^*$

Démonstration : Il s'agit d'une partie de la démonstration du principal résultat de [FS]. L'assertion (Ia) implique, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ et tout $A \in \mathcal{B}(D)$:

$$[\Sigma^i A, \Sigma^k D] \xrightarrow{\sim} ([\check{D}, \Sigma^{N-k+i} A])^*$$

Les suites exactes courtes : $0 \to (\Sigma^n \pi_n(A)) \to P_n(A) \to P_{n-1}(A) \to 0$ associées à la tour de Postnikov d'un objet A $\mathcal{B}(D)$-local induisent des suites exactes longues qui entrainent, par le lemme des cinq, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\mathcal{B}(D)$-local A :

$$[P_n(A), \Sigma^k D] \xrightarrow{\sim} ([\check{D}, \Sigma^{N-k} P_n(A)])^*$$

Soit la suite exacte courte : $0 \to K_n(A) \to A \to P_n(A) \to 0$; $K_n(A)$ est (n-1)-connexe et $\mathcal{B}(D)$-local si A l'est. D'où $[K_n(A), \Sigma^k D] = 0$ pour $n > k$ et, par (Ia), $([\check{D}, \Sigma^{N-k} K_n(A)])^* = 0$ pour $n > k+1$. Ainsi, pour n assez grand, pour tout $A \in Ho(s\mathcal{A})$ les flèches horizontales du premier carré sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
[P_n(\mathscr{L}(A)), \Sigma^k D] & \to & [\mathscr{L}(A), \Sigma^k D] & \to & [A, \Sigma^k D] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
([\check{D}, \Sigma^{N-k} P_n(\mathscr{L}(A))])^* & \to & ([\check{D}, \Sigma^{N-k} \mathscr{L}(A)])^* & \to & ([\check{D}, \Sigma^{N-k} A])^*
\end{array}$$

Les flèches horizontales du second carré sont des isomorphismes par définition de la localisation et (Ib). Ceci démontre (II). $\square$

Chapitre 2

Catégorie de foncteurs et foncteurs symétriques

Il s'agit d'appliquer certaines des considérations du premier chapitre au cas d'une catégorie de foncteurs de source une petite catégorie additive et de but une catégorie de module. Dans la première section, on rappelle quelques propriétés de la filtration polynômiale de ces catégories et on vérifie que l'on peut utiliser les résultats du premier chapitre. Dans la deuxième section, on fait essentiellement le même travail sur la catégorie des foncteurs symétriques, c'est-à-dire des foncteurs à plusieurs variables de valeurs invariantes par permutations des variables. Dans la troisième section, on utilise ces résultats pour donner une description des fibres de localisations dû à B. Johnson et R. McCarthy.

2.1 Catégories de foncteurs

2.1.1 Filtration polynômiale

Définition : Soit $\mathcal{E}$ une petite catégorie additive et A un anneau. $\mathcal{F}(\mathcal{E};A)$ désigne la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{M}od_A$.

La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{E};A)$ est une catégorie de Grothendieck, localement petite. Pour un objet E dans $\mathcal{E}$, on note P_E le foncteur $A[Hom(E,-)]$. La famille $\{P_E\}_{E\in\mathcal{E}}$ forme un ensemble de petits générateurs projectifs dans $\mathcal{F}(\mathcal{E};A)$.

Il est commode de disposer aussi de la catégorie des foncteurs à plusieurs variables. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on notera $\mathcal{F}^{(n)}(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{F}^{(n)}$ ($\mathcal{F}(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{F}$ quand $n=1$) pour $\mathcal{F}(\mathcal{E}^n;A)$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité.

Les foncteurs $\Delta_n:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}^n$ et $\nabla_n:\mathcal{E}^n\longrightarrow\mathcal{E}$, définis par :

$$\Delta_n(V)=(V,...,V) \quad \text{et} \quad \nabla_n(V_1,...,V_n)=\oplus_{i=1}^n V_i$$

sont adjoints à droite et à gauche l'un de l'autre. Ils induisent, par précomposition, des paires d'adjoints : $\Delta_n^*:\mathcal{F}^{(n)}\longleftrightarrow\mathcal{F}:\nabla_n^*$ et $\nabla_n^*:\mathcal{F}\longleftrightarrow\mathcal{F}^{(n)}:\Delta_n^*$:

$$\Delta_n^*(G)(V)=G(V,...,V) \quad \text{et} \quad \nabla_n^*(F)(V_1,...,V_n)=F(\oplus_{i=1}^n V_i)\ .$$

Soit, pour $1\le j\le n$, le foncteur $e_j:\mathcal{E}^n\longrightarrow\mathcal{E}^n$ défini par :

$$e_j(V_1,...,V_n)=(V_1,...,0_j,...,V_n)\ .$$

C'est un facteur direct de $Id_{\mathcal{E}^n}$ et les transformations naturelles :

$$i_j \ : \ e_j \to Id_{\mathcal{E}^n} \quad \text{et} \quad p_j : Id_{\mathcal{E}^n} \to e_j$$

désignent respectivement l'injection et la projection. On pose : $\varepsilon_j = i_j \circ p_j$. Ces transformations naturelles du foncteur $Id_{\mathcal{E}^n}$ dans lui-même sont idempotentes et commutent entre elles.

Par précomposition, on obtient $e_j^* : \mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}^{(n)}$ et $\varepsilon_j^* : Id_{\mathcal{F}^{(n)}} \longrightarrow Id_{\mathcal{F}^{(n)}}$. Les transformations naturelles ε_j^* sont idempotentes et commutent entre elles.

On désigne par $\mathcal{F'}^{(n)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{(n)}$ constituée par les foncteurs G vérifiant pour tout $j \in \{1, ..., n\}$: $e_j^*(G) = 0$, et on note i l'inclusion $\mathcal{F'}^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{F}^{(n)}$.

Définition : Un foncteur est dit n-diagonalisable s'il appartient à $(\Delta_n^* \circ i)(\mathcal{F'}^{(n)})$. Un foncteur simplicial est dit n-diagonalisable s'il appartient à $(\Delta_n^* \circ i)(s\mathcal{F'}^{(n)})$. En particulier, un foncteur simplicial n-diagonalisable est n-diagonalisable en chaque degré.

Soit la transformation naturelle idempotente : $e = (\varepsilon'_1 \circ ... \circ \varepsilon'_n) : Id_{\mathcal{F}^{(n)}} \longrightarrow Id_{\mathcal{F}^{(n)}}$, où $\varepsilon'_j = Id - \varepsilon_j^*$, transformations naturelles idempotentes commutant entre elles.

Pour tout $G \in \mathcal{F}^{(n)}$, on pose $\Pi_n(G) = Im(e(G))$.

Proposition 2.1.1 *[Pi] Le foncteur inclusion* $\mathcal{F'}^{(n)} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{F}^{(n)}$ *possède un adjoint à droite et à gauche :* $\Pi_n : \mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F'}^{(n)}$*. En outre,* $\Pi_n \circ i = Id_{\mathcal{F'}^{(n)}}$*,* $i \circ \Pi_n$ *est idempotent et* Π_n *est facteur direct de* $Id_{\mathcal{F}^{(n)}}$*.*

Démonstration : Pour tout $1 \leq j \leq n$, on a : $e_j^*(\varepsilon_j^*(G)) = Id_{e_j^*(G)} : e_j^*(G) \to e_j^*(G)$. Ceci implique que $e_j^*(\varepsilon'_j(G)) = 0$ et donc : $e_j^*(e(G)) = e_j^*(\varepsilon'_1(G)) \circ ... \circ e_j^*(\varepsilon'_n(G)) = 0$. D'où $e_j^*(\Pi_n(G)) = 0$, soit $\Pi_n(G) \in \mathcal{F'}^{(n)}$. Par naturalité de $e(G)$ en G, on a donc défini un foncteur $\Pi_n : \mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F'}^{(n)}$.

Soit $G \in \mathcal{F'}^{(n)}$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, $e_j^*(G) = 0$, donc $\varepsilon_j^*(G) = 0$, soit encore $\varepsilon'_j(G) = Id_G$. Il s'ensuit que $e(G) = \varepsilon'_1(G) \circ ... \circ \varepsilon'_n(G) = Id_G$, et donc $(E_n \circ i)(G) = G$. Ceci implique que $i \circ \Pi_n$ est idempotent et Π_n facteur direct de $Id_{\mathcal{F}^{(n)}}$.

Enfin, ces propriétés de Π_n assure l'existence des adjonctions (Π_n, i) et (i, Π_n). □

Cette dernière proposition indique également que la catégorie $\mathcal{F'}^{(n)}$ est une catégorie de Grothendieck, localement petite, possédant un ensemble de petits générateurs projectifs $\{\Pi_n(P_E)\}_{E \in \mathcal{E}^n}$.

Définition : On appelle n-ième déviation et on note cr_n le foncteur : $\Pi_n \circ \nabla_n^* : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F'}^{(n)}$. On note : $F_{(n)}(V_1 \mid ... \mid V_n)$ pour $cr_n(F)(V_1, ..., V_n)$. Un foncteur F est dit polynômial de degré inférieur ou égal à n si $cr_{n+1}(F) = 0$. On désigne par $\mathcal{F}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}$ formée des foncteurs polynômiaux de degré inférieur (ou égal) à n.

Proposition 2.1.2 *Le foncteur :* $(\Delta_n^* \circ i) : \mathcal{F'}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}$ *défini par :*

$$(\Delta_n^* \circ i)(G)(V) = G(V, ..., V)$$

est adjoint à droite et à gauche au foncteur : $cr_n : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F'}^{(n)}$ *défini par :*

$$(V_1, ..., V_n) \mapsto F_{(n)}(V_1 \mid ... \mid V_n)$$

Ceci induit les adjonctions :

$(\tilde{\Delta_n^*} \circ \tilde{i}) : Ho(s\mathcal{F'}^{(n+1)}) \longleftrightarrow Ho(s\mathcal{F}) : \tilde{cr_n}$ *et* $\tilde{cr_n} : Ho(s\mathcal{F}) \longleftrightarrow Ho(s\mathcal{F'}^{(n+1)}) : (\tilde{\Delta_n^*} \circ \tilde{i})$.

Démonstration : L'adjonction $(\Delta_n^* \circ i, cr_n)$ (resp. $(cr_n, \Delta_n^* \circ i)$, s'obtient en composant les adjonctions (Δ_n^*, ∇_n^*) et (i, Π_n) (resp. (∇_n^*, Δ_n^*) et (Π_n, i)).

Le passage aux catégories homotopiques est immédiat car les foncteurs considérés sont les prolongements simpliciaux de foncteurs exacts. □

Soient : $Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \Delta_2 : \mathcal{E}^n \longrightarrow \mathcal{E}^{n+1}$ et $Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2 : \mathcal{E}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{E}^n$, définis par :

$$(Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \Delta_2)(V_1, ..., V_n) = (V_1, ..., V_{n-1}, V_n, V_n)$$

et

$$(Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)(V_1, ..., V_{n+1}) = (V_1, ..., V_n \oplus V_{n+1}) \ .$$

Ces foncteurs sont adjoints à droite et à gauche, et induisent les adjonctions :
$((Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \Delta_2)^*, (Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^*)$ et $((Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^*, (Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \Delta_2)^*)$, où :

$$(Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \Delta_2)^*(F)(V_1, ..., V_n) = F(V_1, ..., V_{n-1}, V_n, V_n)$$

$$\text{et} \quad (Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^*(F)(V_1, ..., V_{n+1}) = F(V_1, ..., V_n \oplus V_{n+1}) \ .$$

De plus, on a : $\Delta_{n+1}^* = \Delta_n^* \circ (Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \Delta_2)^*$ et $\nabla_{n+1}^* = (Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^* \circ \nabla_n^*$.
On note également $(Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \Delta_2)^*$ sa restriction : $\mathcal{F}'^{(n+1)} \longrightarrow \mathcal{F}'^{(n)}$.
Le foncteur : $\Pi_{n+1} \circ (Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^* : \mathcal{F}'^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}'^{(n+1)}$ est adjoint à droite et à gauche de ce dernier. On en déduit un isomorphisme : $\Pi_{n+1} \circ (Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^* \circ cr_n \simeq cr_{n+1}$.

Le résultat classique suivant permet de calculer les déviations par récurence (cf. [JP], par exemple)

Proposition 2.1.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $F \in \mathcal{F}$ et $(V_1, ..., V_{n+1}) \in \mathcal{E}^{n+1}$, on a un isomorphisme naturel en F et en $(V_1, ..., V_{n+1})$:*

$$F_{(n)}(V_1 \mid ... \mid V_n \oplus V_{n+1}) \simeq F_{(n)}(V_1 \mid ... \mid V_n) \oplus F_{(n)}(V_1 \mid ... \mid V_{n+1}) \oplus F_{(n+1)}(V_1 \mid ... \mid V_n \mid V_{n+1}) \ .$$

Démonstration : On reprend les notations de la proposition précédente et de sa démonstration. Les foncteurs e_n^* et e_{n+1}^* sont idempotents et $e_n^* \circ e_{n+1}^* \circ (Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2) = 0$ sur $\mathcal{F}'^{(n)}$. Pour tout $G \in \mathcal{F}'^{(n)}$, il existe donc un objet $S \in \mathcal{F}'^{(n+1)}$ et un isomorphisme :

$$(Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^*(G) \simeq e_n^*((Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^*(G)) \oplus e_{n+1}^*((Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^*(G)) \oplus S \ .$$

Pour $i = n, n+1$, on a : $\varepsilon'_i(e_i^*((Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^*(G))) = 0$,
donc : $\Pi_{n+1}(e_i^*((Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^*(G))) = 0$.
D' où : $S \simeq \Pi_{n+1}((Id_{\mathcal{E}^{n-1}} \times \nabla_2)^*(G))$. En prenant : $G = cr_n(F)$, on obtient la proposition.
□

La proposition précédente indique en particulier que $cr_{n+1}(F) = 0$ dès que $cr_n(F) = 0$. La suite croissante de sous-catégories épaisses de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_d$) :

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset ...$$

définit la filtration polynômiale de $\mathcal{F}$.

Pour les foncteurs à n variables, on note : $\Delta_d^{(n)*}$ et $\nabla_d^{(n)*}$ les foncteurs induits respectivement par : $(\Delta_d)^n : \mathcal{E}^n \to (\mathcal{E}^d)^n = (\mathcal{E}^n)^d$ et $(\nabla_d)^n : (\mathcal{E}^d)^n = (\mathcal{E}^n)^d \to \mathcal{E}^n$.

Proposition 2.1.4 *Soient, pour $d, n \in \mathbb{N}$, $cr_d^{(n)}$ (resp. cr_d) la d-ième déviation de $\mathcal{F}(\mathcal{E}^n)$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{E})$). Pour tout $G \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^n)$, on a un isomorphisme naturel dans $\mathcal{F}^{(d)}$:*

$$(\Delta_n^{(d)*} \circ cr_d^{(n)})(G) \simeq (cr_d \circ \Delta_n^*)(G) \ .$$

En particulier : $(\Delta_n^*)^{-1}(\mathcal{F}_d(\mathcal{E}))\mathcal{F}_d(\mathcal{E}^n)$.

Démonstration : Il suffit de vérifier la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathcal{E}^n) \arrow[r, "\nabla_d^{(n)*}"] \arrow[d, "\Delta_n^*"] & \mathcal{F}^{(d)}(\mathcal{E}^n) \arrow[r, "\Pi_d^{(n)}"] \arrow[d, "\Delta_n^{(d)*}"] & \mathcal{F}'^{(d)}(\mathcal{E}^n) \arrow[d, "\Delta_n^{(d)*}"] \\
\mathcal{F}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\nabla_d^*"] & \mathcal{F}^{(d)}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\Pi_d"] & \mathcal{F}'^{(d)}(\mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

La commutativité du carré gauche provient de l'égalité : $\nabla_d^{(n)} \circ \Delta_n^{(d)} = \Delta_n \circ \nabla_d$, et celle du carré droit s'obtient par adjonction. □

Corollaire 2.1.5 *Les foncteurs exacts : $\Delta_n^* : \mathcal{F}_d^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}_d$ et $\nabla_n^* : \mathcal{F}_d \longrightarrow \mathcal{F}_d^{(n)}$ sont bien définis, et forment deux paires de foncteurs adjoints : (Δ_n^*, ∇_n^*) et (∇_n^*, Δ_n^*).* □

Le résultat suivant de T. Pirashvili [BP, Appendix] permet de distinguer une classe utile de $h\mathcal{F}_n$-acycliques.

Proposition 2.1.6 *Soient F et G des foncteurs simpliciaux. Si l'homotopie de F est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et si G est n-diagonalisable, alors : $[G, F] \simeq 0$ et $[F, G] \simeq 0$.*

En particulier, tout foncteur simplicial n-diagonalisable en chaque degré est $h\mathcal{F}_{n-1}$-acyclique.

Démonstration : Les deux annulations résultent des adjonctions : $(\tilde{\Delta_n^*} \circ \tilde{i}, \tilde{cr_n})$ et $(\tilde{cr_n}, \tilde{\Delta_n^*} \circ \tilde{i})$. En effet, si l'homotopie de F est de degré inférieur ou égal à $n-1$, $\pi_*(\tilde{cr_n}(F)) \simeq cr_n(\pi_*(F)) \simeq 0$, soit $\tilde{cr_n}(F) \simeq 0$ dans $Ho(s\mathcal{F})$. D'autre part, si G est n-diagonalisable, il existe $H \in s\mathcal{F}'^{(n)}$ tel que $G \simeq (\tilde{\Delta_n^*} \circ \tilde{i})(H)$. On a donc : $[G, F] \simeq [H, \tilde{cr_n}(F)] \simeq 0$ et $[F, G] \simeq [\tilde{cr_n}(F), H] \simeq 0$.
La dernière remarque s'obtient en prenant $F = \Sigma^k B$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{F}_{n-1}$, et par récurrence sur le squelette d'un foncteur simplicial n-diagonalisable en chaque degré. □
Remarque : Une réciproque est montrée en 2.1.12.

Corollaire 2.1.7 *Tout foncteur de $\mathcal{F}$ $(d+1)$-diagonalisable est $\mathcal{F}_d$-local et $\mathcal{F}_d$-colocal.* □

2.1.2 Localisations dans les catégories de foncteurs

On pose : $cr_{d+1}^\delta = (\Delta_{d+1}^* \circ i) \circ cr_{d+1}$, soit, pour tout F dans $\mathcal{F}$ et V dans $\mathcal{E}$:

$$cr_{d+1}^\delta(F)(V) = F_{(d+1)}(V \mid ... \mid V)$$

et on note c la co-unité de l'adjonction : $(\Delta^* \circ i, cr_{d+1})$. Pour tout F dans $\mathcal{F}$, on a une suite exacte naturelle en F :

$$cr_{d+1}^\delta(F) \xrightarrow{c} F \longrightarrow m_d(F) \longrightarrow 0 \ .$$

De même, l'unité de l'adjonction : $(cr_{d+1}, \Delta_{d+1}^* \circ i))$ donne une suite exacte :

$$0 \longrightarrow t_d(F) \longrightarrow F \longrightarrow cr_{d+1}^\delta(F) \; .$$

L'objet $cr_{d+1}^\delta(F)$ est d-local et d-colocal par le corollaire 2.1.7.

Lemme 2.1.8 *[Pi] L'injection : $\mathcal{F}_d \overset{i_d}{\hookrightarrow} \mathcal{F}$ possède un adjoint à gauche (resp. à droite), noté : m_d (resp. t_d). En particulier, pour $F \in \mathcal{F}$, $m_d(F)$ (resp. $t_d(F)$) est le plus grand quotient (resp. sous-objet) de F dans $\mathcal{F}_d$.*

Démonstration : Notant u l'unité de l'adjonction $(\Delta_{d+1}^* \circ i, cr_{d+1})$, la composée :

$$(cr_{d+1}(c_F) \circ u_{cr_{d+1}(F)}) : cr_{d+1}(F) \to (cr_{d+1} \circ cr_{d+1}^\delta)(F) \to cr_{d+1}(F)$$

est l'identité de $cr_{d+1}(F)$. Cela montre, par l'exactitude de cr_{d+1}, que $cr_{d+1}(m_d(F)) = 0$, soit $m_d(F) \in \mathcal{F}_d$.

Soit Q un quotient de F, de degré inférieur ou égal à d. La composée : $cr_{d+1}^\delta(F) \xrightarrow{c} F \longrightarrow Q$ est nulle car $cr_{d+1}^\delta(F)$ est d-colocal, si bien que $F \longrightarrow Q$ se factorise par $m_d(F)$. Le quotient $m_d(F)$ est donc maximal parmi les quotients de F appartenant à $\mathcal{F}_d$, ce qui implique l'existence de l'adjonction : (m_d, i_d). □

Corollaire 2.1.9 *On a des isomorphismes naturels de foncteurs de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}_d^{(n)}$: $cr_n \circ m_d \simeq m_d^{(n)} \circ cr_n$ et de foncteurs de $\mathcal{F}^{(n)}$ vers $\mathcal{F}_d$: $\Delta_n^* \circ m_d^{(n)} \simeq m_d \circ \Delta_n^*$.*

Démonstration : Le résultat se déduit de l'adjonction à droite et à gauche de cr_n et Δ_n^*, et des adjonctions (m_d, i_d) et $(m_d^{(n)}, i_d^{(n)})$ données par la proposition précèdente. □

Proposition 2.1.10 *Pour chaque entier positif d, les sous-catégories $\mathcal{F}_d$ sont localisantes et colocalisantes.*

Démonstration : On utilise la caractérisation donnée par la proposition 1.1 du chapitre I. Soit $F \in \mathcal{F}$. Le lemme précédent assure que F possède un quotient maximal dans $\mathcal{F}_d$: $m_d(F)$, et la suite exacte : $cr_{d+1}^\delta(F) \xrightarrow{c} F \longrightarrow m_d(F) \longrightarrow 0$ montre que si celui-ci est nul, F est quotient d'un colocal. □

Proposition 2.1.11 *Pour chaque entier positif d, les catégories $\mathcal{F}_d$ et $\mathcal{F}/\mathcal{F}_d$ sont des catégories de Grothendieck bicomplètes. La catégorie $\mathcal{F}_d$ possède un ensemble de petits générateurs projectifs $\{m_d(P_E)\}_{E \in \mathcal{E}}$. La catégorie quotient $\mathcal{F}/\mathcal{F}_d$ possède un générateur projectif de la forme $T_d(cr_{d+1}^\delta(Q))$, où Q est un générateur projectif quelconque de $\mathcal{F}$ (par exemple : $Q = \oplus_\mathcal{E} P_E$) et T_d désigne le foncteur : $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_d$.*

Démonstration : La première partie découle du fait que $\mathcal{F}_d$ est localisante [G, P].

L'ensemble $\{P_E\}_{E \in \mathcal{E}}$ est un ensemble de petit générateur projectif de $\mathcal{F}$. L'isomorphisme d'adjonction : $Hom_{\mathcal{F}_d}(m_d(P_E), -) \simeq Hom_\mathcal{F}(P_E, -)$ montre que $\{m_d(P_E)\}_{E \in \mathcal{E}}$ est un ensemble de petit générateur projectif dans $\mathcal{F}_d$.

La catégorie $\mathcal{F}$ possédant suffisament de projectifs, il existe pour tout $F \in \mathcal{F}$ un projectif $P \in \mathcal{F}$ et un épimorphisme $P \to F$. La composée : $cr_{d+1}^\delta(P) \xrightarrow{c} P \to F$ induit un épimorphisme par $T_d : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_d$. Il reste à vérifier que $T_d(cr_{d+1}^\delta(P))$ est projectif dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}_d$. L'adjonction (S_d, T_d) et le fait que $cr_{d+1}^\delta(P)$ est d-colocal entrainent les isomorphismes :

$$Hom(T_d(cr_{d+1}^\delta(P)), -) \circ T_d \simeq Hom((S_d \circ T_d)(cr_{d+1}^\delta(P)), -) \simeq Hom(cr_{d+1}^\delta(P), -).$$

Ceci assure que $Hom(T_d(cr^{\delta}_{d+1}(P)), -)$ est exact. $\square$

Les propriétés observées dans les propositions précédentes assurent que ces mêmes propositions s'adaptent aux inclusions : $\mathcal{F}_n \hookrightarrow \mathcal{F}_d$, pour $n \leq d$, $\mathcal{F}_d$ en place de $\mathcal{F}$, par restriction des foncteurs cr_n et $\Delta_n^* \circ i$.

En particulier, ces propositions assurent l'existence des catégories homotopiques et des adjonctions :

$(\tilde{\Delta_n^*} \circ \tilde{i}) : Ho(s\mathcal{F}'^{(n)}_d) \longleftrightarrow Ho(s\mathcal{F}_d) : \tilde{cr_n}$ et $\tilde{cr_n} : Ho(s\mathcal{F}_d) \longleftrightarrow Ho(s\mathcal{F}'^{(n)}_d) : (\tilde{\Delta_n^*} \circ \tilde{i})$, ce qui permet d'obtenir la proposition 2.1.6 dans $s\mathcal{F}_d$.

L'ensemble des hypothèses considérées dans le chapitre I sont vérifiées par les situation colocalisantes : $\mathcal{F}_n \hookrightarrow \mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_n \hookrightarrow \mathcal{F}_d$, pour $n \leq d$), justifiant l'existence de $h\mathcal{F}_n$-acyclisation $\mathscr{A}_n$ (resp. $\mathscr{A}_n^d$) et de $h\mathcal{F}_n$-localisation $\mathscr{L}_n$ (resp. $\mathscr{L}_n^d$) dans $Ho(s\mathcal{F})$ (resp. $Ho(s\mathcal{F}_d)$).

On rappelle que $F \in s\mathcal{F}$ est dit $h\mathcal{F}_n$-acyclique si, pour tout $B \in \mathcal{F}_n$: $[F, \Sigma^* B] = 0$ et que les foncteurs simpliciaux $(n+1)$-diagonalisables en chaque degré sont $h\mathcal{F}_n$-acycliques (cf. la proposition 2.1.6).

Théorème 2.1.12 *Dans $Ho(s\mathcal{F})$ (resp. $Ho(s\mathcal{F}_d)$), un objet est $h\mathcal{F}_n$-acyclique si et seulement s'il est isomorphe à un objet $(n+1)$-diagonalisable en chaque degré, qui peut être choisit cofibrant.*

Démonstration : On reprend les notations du chapitre I, section 1.2.
Par la proposition I,2.2, un $h\mathcal{F}_n$-acyclique est isomorphe à un objet V-libre (somme de V en chaque degré), où $V = S_n(U')$, U' un générateur projectif de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_n$. Il suffit de vérifier que l'on peut choisir V $(n+1)$-diagonalisable et projectif.
D'après la proposition 2.1.11, U' peut être choisit de la forme : $T_n(cr^{\delta}_{n+1}(P))$, avec P projectif, et alors $V = (S_n \circ T_n)(cr^{\delta}_{n+1}(P)) \simeq cr^{\delta}_{n+1}(P)$ convient. $\square$

Corollaire 2.1.13 *Soient $n \leq d$ des entiers positifs et F dans $Ho(s\mathcal{F}_d)$. L'image par $\tilde{i_d} : Ho(s\mathcal{F}_d) \longrightarrow Ho(s\mathcal{F})$ de la suite de cofibration : $\mathscr{A}_n^d(F) \longrightarrow F \longrightarrow \mathscr{L}_n^d(F)$ est la suite de cofibration : $\mathscr{A}_n(\tilde{i_d}(F)) \longrightarrow \tilde{i_d}(F) \longrightarrow \mathscr{L}_n(\tilde{i_d}(F))$.*

En particulier, on a des isomorphismes naturels : $\tilde{i_d} \circ \mathscr{A}_n^d \simeq \mathscr{A}_n \circ \tilde{i_d}$ et $\tilde{i_d} \circ \mathscr{L}_n^d \simeq \mathscr{L}_n \circ \tilde{i_d}$.

Démonstration : Comme $\tilde{i_d}$ préserve les suites de cofibrations, il s'agit de montrer que $\tilde{i_d}(\mathscr{A}_n^d(F))$ est $h\mathcal{F}_n$-acyclique et que $\tilde{i_d}(\mathscr{L}_n^d(F))$ est $h\mathcal{F}_n$-local. Le premier point provient de ce que l'homotopie : $\pi_*(\tilde{i_d}(\mathscr{L}_n^d(F))) \simeq i_d(\pi_*(\mathscr{L}_n^d(F)))$ est dans $\mathcal{F}_n$.

D'après la proposition précédente, on peut supposer que $\mathscr{A}_n^d(F)$ est un objet $(n+1)$-diagonalisable en chaque degré. C'est alors aussi le cas de $\tilde{i_d}(\mathscr{A}_n^d(F))$, ce qui établit le second point. $\square$

Ce corollaire justifie que l'on note par la suite $\mathscr{L}_n$ (resp. $\mathscr{A}_n$) pour $\mathscr{L}_n^d$ (resp. $\mathscr{A}_n^d$).

2.2 Foncteurs symétriques

On considère dans cette section une certaine catégorie de foncteurs à plusieurs variables de valeurs invariantes par permutations des variables, introduite et étudiée par L. Piriou dans [Pi].

2.2.1 Définitions

Soit Σ_n le n-ième groupe symétrique.

Soient, pour $\sigma \in \Sigma_n$, $t_\sigma : \mathcal{E}^n \longrightarrow \mathcal{E}^n$, tel que : $t_\sigma(E_1, ..., E_n) = (E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(n)})$, et $t_\sigma^* : \mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}^{(n)}$, le foncteur induit par précomposition.

On a $t_\sigma \circ t_\tau = t_{\tau\sigma}$, et donc $t_\sigma^* \circ t_\tau^* = t_{\sigma\tau}^*$. En particulier, t_σ^* est un isomorphisme de catégorie, d'inverse et d'adjoint à droite et à gauche $t_{\sigma^{-1}}^*$.

Soit l'endofoncteur : $Sym = (\bigoplus_{\Sigma_n} t_\sigma^*) : \mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}^{(n)}$.

On définit une unité $\eta : Id = t_1^* \longrightarrow Sym$ comme l'injection du facteur direct, et une multiplication $\mu : Sym^2 \longrightarrow Sym$ comme la composé :

$$Sym^2 = \bigoplus_\sigma t_\sigma^*(\bigoplus_\tau t_\tau^*) \simeq (\bigoplus_{(\sigma,\tau)\in\Sigma_n^2} t_{\sigma\tau}^*) \longrightarrow (\bigoplus_\sigma t_\sigma^*) = Sym$$

où la flèche est la somme (sur $\Sigma_n \times \Sigma_n$) des injections $t_{\sigma\tau}^* \hookrightarrow \bigoplus_\sigma t_\sigma^*$.

Proposition 2.2.1 *Le triplet (Sym, μ, η) constitue une monade de $\mathcal{F}^{(n)}$. De plus, Sym est exact et auto-adjoint.*

Démonstration :

$$\begin{tikzcd} Sym^3 \arrow[r, "Sym(\mu)"] \arrow[d, "\mu_{Sym}"'] & Sym^2 \arrow[d, "\mu"] \\ Sym^2 \arrow[r, "\mu"'] & Sym \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Sym \arrow[r, "\eta_{Sym}"] \arrow[dr, "Id_{Sym}"'] & Sym^2 \arrow[d, "\mu"] & Sym \arrow[l, "Sym(\eta)"'] \arrow[dl, "Id_{Sym}"] \\ & Sym & \end{tikzcd}$$

Les axiomes d'associativité et d'unité [McL] pour le triplet découle de ce que ces mêmes propriétés sont vérifiés par le groupe Σ_n.

Les foncteurs t_σ^* sont des précompositions, donc exacts, ce qui entraine l'exactitude de Sym. L'auto-adjonction de Sym découle des adjonctions : $(t_\sigma^*, t_{\sigma^{-1}}^*)$. □

Définition : On note $\mathcal{S}^{(n)}$ et on appelle catégorie des foncteurs symétriques la sous-catégorie (non pleine) de $\mathcal{F}^{(n)}$ des Sym-algèbres. Sym^l désignera le foncteur libre : $\mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{S}^{(n)}$ adjoint à gauche de l'oubli : $\mathcal{S}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}^{(n)}$.

Un foncteur symétrique est donc la donnée d'un objet de $\mathcal{F}^{(n)}$ muni d'une action $a^G : Sym(G) \to G$. Ceci est équivalent à la donnée d'un ensemble de morphisme : $\{a_\sigma^G : t_\sigma^*(G) \to G\}_{\sigma\in\Sigma_n}$ vérifiant les équations [Pi] :

(1) $a_1^G = Id_G$,

(2) Pour tout $\sigma, \tau \in \Sigma_n$, $a_\sigma^G \circ t_\sigma^*(a_\tau^G) = a_{\sigma\tau}^G : t_{\sigma\tau}^*(G) \to G$.

En particulier, on a : $a_\sigma^G \circ t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^G) = Id_G$.

Un morphisme de foncteurs symétriques est la donnée d'un morphisme $f \in Hom_{\mathcal{F}^{(n)}}(F, G)$ vérifiant les équations : pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, $a_\sigma^G \circ t_\sigma^*(f) = f \circ a_\sigma^F$.

Proposition 2.2.2 *La catégorie $\mathcal{S}^{(n)}$ est une catégorie de Grothendieck bicomplète, sous-catégorie abélienne de $\mathcal{F}^{(n)}$, possédant un ensemble de petits générateurs projectifs $\{Sym^l(P_E)\}_{E\in\mathcal{E}^n}$. De plus, le foncteur oubli préserve les projectifs, et Sym^l est adjoint à droite de l'oubli.*

Démonstration : Le fait que $\mathcal{S}^{(n)}$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{F}^{(n)}$ est assuré par l'exactitude de Sym. De plus, Sym commutant avec toute limite et colimite, $\mathcal{S}^{(n)}$ possède toute limite et colimite.

La catégorie $\mathcal{F}^{(n)}$ possède un ensemble de petits générateurs projectifs : $\{P_E\}_{E\in\mathcal{E}^n}$. L'isomorphisme d'adjonction : $Hom_{\mathcal{S}^{(n)}}(Sym^l(P_E),-) \simeq Hom_{\mathcal{F}^{(n)}}(P_E, o-)$ montre que $\{Sym^l(P_E)\}_{E\in\mathcal{E}^n}$ est un ensemble de petits générateurs projectifs dans $\mathcal{S}^{(n)}$.

En outre, comme Sym est auto-adjoint et exact, on a un isomorphisme naturel :

$$Hom_{\mathcal{F}^{(n)}}(o\ Sym^l(P_E),-) \simeq Hom_{\mathcal{F}^{(n)}}(P_E,-)\circ Sym$$

ce qui montre que l'oubli préserve les projectifs.

En particulier, $\mathcal{S}^{(n)}$ possède un générateur et des colimites filtrantes exactes. C'est donc une catégorie de Grothendieck.

Pour vérifier la dernière assertion, on considère, pour chaque G dans $\mathcal{S'}^{(n)}$, une présentation libre : $Sym^l(oP_1) \to Sym^l(oP_0) \to G \to 0$, où P_0 et P_1 sont des projectifs de $\mathcal{S}^{(n)}$, pour se ramener à une vérification sur les objets Sym-libres de $\mathcal{S'}^{(n)}$. Celle-ci découle de l'auto-adjonction de Sym dans $\mathcal{F}^{(n)}$. □

On note $\mathcal{F}^{\Sigma_n}$ la catégorie des algèbres sur la monade standard de $\mathcal{F}$: $((\mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}}-), m, u)$, où m et u sont induit par la multiplication et l'unité de Σ_n. On désigne également par $(\mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}}-)$ l'adjoint à gauche de l'oubli : $\mathcal{F}^{\Sigma_n} \longrightarrow \mathcal{F}$.

Proposition 2.2.3 *Le foncteur diagonal :* $\Delta_n^* : \mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}$ *transforme la monade* (Sym, μ, η) *en la monade* $((\mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}}-), m, u)$ *et donc les Sym-algèbres en* $(\mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}}-)$*-algèbres .*

En particulier, on a un isomorphisme naturel : $\Delta_n^*\circ Sym \simeq (\mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}}-)\circ\Delta_n^* : \mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}^{\Sigma_n}$*, soit pour tout* G *dans* $\mathcal{F}^{(n)}$ *et tout* V *dans* $\mathcal{E}$ *:*

$$(Sym(G))(V,...,V) \simeq \mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}}G(V,...,V)$$

Démonstration : Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on a : $t_\sigma \circ \Delta_n = \Delta_n$, et donc $\Delta_n^* \circ t_\sigma^* = \Delta_n^*$. D'où les isomorphismes naturels en V et en G :

$\Delta_n^*(Sym(G))(V) \simeq \bigoplus_{\Sigma_n}\Delta_n^*(t_\sigma^*(G))(V) = \bigoplus_{\Sigma_n}G(V,...,V) \simeq \mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}}G(V,...,V)$.

Par définition, un objet G de $\mathcal{F}^{(n)}$ appartient à $\mathcal{S}^{(n)}$ s'il est muni d'une action a^G : $Sym(G) \to G$. En appliquant Δ_n^*, on obtient une action $\mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}}(\Delta_n^*(G)) \to \Delta_n^*(G)$. □

Proposition 2.2.4 *(i) Le foncteur* $\nabla_n^* : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{(n)}$ *se factorise par l'oubli en un foncteur :* $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}^{(n)}$*, également noté* ∇_n^**, qui à* F *dans* $\mathcal{F}$ *et* $(V_1,...,V_n)$ *dans* $\mathcal{E}^n$ *associe :* $\nabla_n^*(F)(V_1,...,V_n) = F(V_1\oplus...\oplus V_n)$*.*

(ii) Le foncteur composé $\Delta_n^*\circ o : \mathcal{S}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}$ *se factorise par l'oubli en un foncteur :* $\mathcal{S}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}^{\Sigma_n}$*, également noté* Δ_n^**, qui à* G *dans* $\mathcal{F}^{(n)}$ *et* V *dans* $\mathcal{E}$ *associe :* $\Delta_n^*(G)(V) = G(V,...,V)$*.*

Démonstration : (i) Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on a un isomorpisme naturel : $(\sum_k i_k \circ p_{\sigma(k)})$: $\nabla_n \longrightarrow \nabla_n \circ t_\sigma$, où i_k et p_k désigne respectivement l'injection et la projection du k-ième facteur direct. Celui-ci induit un isomorphisme : $a_\sigma : t_\sigma^*\circ\nabla_n^* \longrightarrow \nabla_n^*$. Pour tout F de $\mathcal{F}$, la flèche : $\bigoplus_{\Sigma_n} a_\sigma(F) : Sym(\nabla_n^*(F)) \longrightarrow \nabla_n^*(F)$ définit alors sur $\nabla_n^*(F)$ une structure de foncteur symétrique.

(ii) Cette assertion découle de la proposition précédente. □

Les considérations qui précèdent s'adaptent aux foncteurs s'annulant dès qu'une variable est nulle.

On définit $\mathcal{S}'^{(n)} = \mathcal{S}^{(n)} \cap \mathcal{F}'^{(n)}$, la catégorie des foncteurs symétriques à n variables, nul lorsqu'une variable est nulle. C'est également la catégorie des $Sym-$algèbres de $\mathcal{F}'^{(n)}$.

Soit $G \in \mathcal{S}^{(n)}$. Comme facteur direct, $\Pi_n(G)$ hérite de la structure de $Sym-$algèbre de G, si bien que $\Pi_n : \mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}'^{(n)}$ induit un foncteur : $\mathcal{S}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{S}'^{(n)}$, et le carré gauche du diagramme est complètement commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}'^{(n)} \arrow[r, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "o"] & \mathcal{S}^{(n)} \arrow[l, shift right, "\Pi_n"'] \arrow[r, shift right, "\Delta_n^*"'] \arrow[d, shift left, "o\,(\mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}}-)"] & \mathcal{F}^{\Sigma_n} \arrow[l, shift right, "\nabla_n^*"'] \arrow[r, shift right, "Colim_{\Sigma_n}"'] \arrow[d, shift left, "o"] & \mathcal{F} \arrow[l, shift right, "c"'] \\
\mathcal{F}'^{(n)} \arrow[r, shift right, "i"'] \arrow[u, shift left, "Sym^l"] & \mathcal{F}^{(n)} \arrow[l, shift right, "\Pi_n"'] \arrow[r, shift right, "\Delta_n^*"'] \arrow[u, shift left, "Sym^l"] & \mathcal{F} \arrow[l, shift right, "\nabla_n^*"'] \arrow[u, shift left] &
\end{tikzcd}$$

On désigne par $Colim_{\Sigma_n} : \mathcal{F}^{\Sigma_n} \longrightarrow \mathcal{F}$, ou $(-)_{\Sigma_n}$, le foncteur "co-invariants". On note encore cr_n le foncteur déviation : $\Pi_n \circ {\nabla_n}^* \circ c : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}'^{(n)}$, qui à F dans $\mathcal{F}$ et $(V_1, ..., V_n)$ dans $\mathcal{E}^{(n)}$ associe $F_{(n)}(V_1 \mid ... \mid V_n)$. On désigne par S_n le foncteur : $Colim_{\Sigma_n} \circ \Delta_n^* \circ i$: $\mathcal{S}'^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}$, qui à G dans $\mathcal{S}'^{(n)}$ et V dans $\mathcal{E}$ associe $(G(V, ..., V))_{\Sigma_n}$.

2.2.2 Adjonctions

Proposition 2.2.5 *Les foncteurs : $S_n : \mathcal{S}'^{(n)} \longleftrightarrow \mathcal{F} : cr_n$ forment une paire d'adjoints.*

Démonstration : Par l'adjonction : $(Colim_{\Sigma_n}, c)$, il suffit d'obtenir une adjonction : (Δ_n^*, ∇_n^*), soit pour $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{S}'^{(n)}$: $Hom_{\mathcal{S}'^{(n)}}(G, \nabla_n^*(F)) \simeq Hom_{\mathcal{F}^{\Sigma_n}}(\Delta_n^*(G), F)$.

On considère d'abord le cas où G est Sym-libre, soit $G = Sym^l(G')$, où $G' \in \mathcal{F}^{(n)}$. On a alors les isomorphismes suivants :

$Hom_{\mathcal{S}^{(n)}}(G, \nabla_n^*(F))$
$\simeq Hom_{\mathcal{F}^{(n)}}(G', \nabla_n^*(F))$ par l'adjonction (Sym^l, o)
$\simeq Hom_{\mathcal{F}}(\Delta_n^*(G'), F)$ par l'adjonction (Δ_n^*, ∇_n^*) usuelle
$\simeq Hom_{\mathcal{F}^{\Sigma_n}}(\mathbb{Z}[\Sigma_n] \otimes_{\mathbb{Z}} (\Delta_n^*(G')), F)$ par l'adjonction $((\mathbb{Z}[\Sigma_n] \otimes_{\mathbb{Z}} -), o)$
$\simeq Hom_{\mathcal{F}^{\Sigma_n}}(\Delta_n^*(Sym(G')), F)$ par la proposition 2.2.3.

Pour tout $G \in \mathcal{S}'^{(n)}$, il existe un début de résolution : $Sym(P_1) \to Sym(P_0) \to G \to 0$, qui permet de déduire le cas général. □

Proposition 2.2.6 *L' adjonction précédente engendre la paire d'adjoint :*
$\boldsymbol{L}(S_n) : Ho(s\mathcal{S}'^{(n)}) \longleftrightarrow Ho(s\mathcal{F}) : \tilde{cr}_n$.

Démonstration : Le foncteur : $cr_n : s\mathcal{F} \longrightarrow s\mathcal{S}'^{(n)}$ est le prolongement simplicial d'un foncteur exact. Il préserve donc les équivalences faibles et les fibrations. Ceci assure l'existence de $\tilde{cr}_n$, de $\boldsymbol{L}(S_n)$, et de l'adjonction. □

On a les équivalences : $\mathcal{F}^{\Sigma_n} \simeq \mathcal{F}(\mathcal{E} \times \Sigma_n; A) \simeq \mathcal{F}(\mathcal{E}; A[\Sigma_n])$. La catégorie $\mathcal{F}^{\Sigma_n}$ est donc de Grothendieck, avec suffisament de projectifs. Par les mêmes arguments que ci-dessus, on a les adjonctions :

$\boldsymbol{L}(Colim_{\Sigma_n}) : Ho(s\mathcal{F}^{\Sigma_n}) \longleftrightarrow Ho(s\mathcal{F}) : \tilde{c}$,

et $\tilde{\Delta_n^*} \circ \tilde{i} : Ho(s\mathcal{F}^{\Sigma_n}) \longleftrightarrow Ho(s\mathcal{F}^{\Sigma_n}) : \tilde{E_n} \circ \tilde{\nabla_n^*}$.
En particulier, on a : $\boldsymbol{L}(S_n) \simeq \boldsymbol{L}(Colim_{\Sigma_n}) \circ (\tilde{\Delta_n^*} \circ \tilde{i})$.

Suivant [BK, p.303] ou [DHK], on peut définir la colimite homotopique : $(-)_{h\Sigma_n} = hocolim_{\Sigma_n} : \mathcal{F}^{\Sigma_n} \longrightarrow \mathcal{F}$, via le remplacement simplicial : soit $X \in s\mathcal{F}$, $(X)_{h\Sigma_n} = diag(\mathbb{Z}[\Sigma_n]^{\otimes *} \otimes_{\mathbb{Z}} X_*)$. Le foncteur $hocolim_{\Sigma_n}$ préserve les équivalences faibles, et induit donc : $hocolim_{\Sigma_n} : Ho(\mathcal{F}^{\Sigma_n}) \longrightarrow Ho(\mathcal{F})$. Selon [DHK], pour tout $X \in Ho(\mathcal{F})$: $\boldsymbol{L}(Colim_{\Sigma_n})(X) \simeq hocolim_{\Sigma_n}(X)$.

Proposition 2.2.7 *$\boldsymbol{L}(S_n)$ est à valeur dans les (n-1)-acycliques.*

Démonstration : Soient $G \in Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$ et $F \in \mathcal{F}_{n-1}$. On a : $cr_n(F) = 0$, donc par adjonction : $[\boldsymbol{L}(S_n)(G), \Sigma^* F] \simeq [G, \Sigma^* \tilde{cr_n}(F)] \simeq 0$. □

2.2.3 Foncteurs symétriques polynômiaux

Définition : La catégorie des foncteurs symétriques polynômiaux de degré inférieur ou égal à d est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}^{(n)}$: $\mathcal{S}_d^{(n)} = \mathcal{S}^{(n)} \cap \mathcal{F}_d^{(n)}$.

On forme une adjonction : $(Sym^l \circ \Delta_{d+1}^{(n)*} \circ i) : \mathcal{S}^{(n)} \longleftrightarrow \mathcal{F}'^{(d+1)}(\mathcal{E}^n) : (cr_{d+1}^{(n)} \circ o)$, en composant les adjonctions (Sym^l, o) et $(\Delta_{d+1}^{(n)*} \circ i, cr_{d+1}^{(n)})$.

Soit c sa co-unité : $(Sym^l \circ cr_{d+1}^{(n)\delta}) \longrightarrow Id$. On note $sm_d^{(n)}$ le foncteur $Coker(c)$.

Des arguments identiques à ceux employés pour la démonstration du lemme 2.1.8 montrent que $sm_d^{(n)}$ est un foncteur à valeur dans $\mathcal{S}_d^{(n)}$, adjoint à gauche de $i_d : \mathcal{S}_d^{(n)} \longrightarrow \mathcal{S}^{(n)}$.

Proposition 2.2.8 *La catégorie $\mathcal{S}_d^{(n)}$ est sous-catégorie localisante et colocalisante de $\mathcal{S}^{(n)}$ et $\mathcal{S}_d^{(n)}$ et $(\mathcal{S}^{(n)}/\mathcal{S}_d^{(n)})$ sont des catégories de Grothendieck bicomplètes. De plus, $\mathcal{S}_d^{(n)}$ possède un ensemble de petits générateurs projectifs $\{sm_d^{(n)}(P_E)\}_{E\in\mathcal{E}}$, et $(\mathcal{S}^{(n)}/\mathcal{S}_d^{(n)})$ possède un générateur projectif de la forme $T_d(Sym^l(cr_{d+1}^{(n)\delta}(P)))$, où P est un projectif de $\mathcal{F}^{(n)}$.*

Démonstration : Avec les remarques ci-dessus, le fait que $\mathcal{S}_d^{(n)}$ est sous-catégorie colocalisante se vérifie de la même manière que pour $\mathcal{F}_d$ dans la proposition 2.1.10. Comme $\mathcal{S}^{(n)}$ est une catégorie de Grothendieck, $\mathcal{S}_d^{(n)}$ est également une sous-catégorie localisante.

Le reste de la propositon s'obtient comme la propositon 2.1.11. □

Les propriétés observées dans les propositions précédentes assurent que ces mêmes propositions s'adaptent aux inclusions : $\mathcal{S}_m^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{S}_d^{(n)}$, pour $m \leq d$, $\mathcal{S}_d^{(n)}$ en place de $\mathcal{S}^{(n)}$, par restriction des foncteurs $cr_m^{(n)}$ et $\Delta_m^{(n)*} \circ i$.

En particulier, ces propositions assurent l'existence des catégories homotopiques.

L'ensemble des hypothèses considérées dans le chapitre I sont vérifiées par les situation colocalisantes : $\mathcal{S}_m^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{S}^{(n)}$ (resp. $\mathcal{S}_m^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{S}_d^{(n)}$, pour $m \leq d$), justifiant l'existence de $h\mathcal{S}_m^{(n)}$-acyclisation $\mathscr{A}_m^{s(n)}$ (resp. $\mathscr{A}_m^{s(n)d}$) et de $h\mathcal{S}_m^{(n)}$-localisation $\mathscr{L}_m^{s(n)}$ (resp. $\mathscr{L}_m^{s(n)d}$) dans $Ho(s\mathcal{S}^{(n)})$ (resp. $Ho(s\mathcal{S}_d^{(n)})$).

Conformément aux notations de la section 1.2, la $h\mathcal{S}_m^{(n)}$-acyclisation et la $h\mathcal{S}_m^{(n)}$-localisation de $Ho(s\mathcal{F}^{(n)})$ sont notées respectivement $\mathscr{A}_m^{(n)}$ et $\mathscr{L}_m^{(n)}$.

Proposition 2.2.9 *Dans $Ho(s\mathcal{S}^{(n)})$ (resp. $Ho(s\mathcal{S}_d^{(n)})$), un objet est $h\mathcal{S}_m^{(n)}$-acyclique si et seulement s'il est isomorphe à un objet qui est en chaque degré le symétrisé d'un $(m+1)$-diagonalisable. Cet objet peut être choisit cofibrant.*

Démonstration : Cette proposition découle de la proposition 2.2.8, de la même manière que pour la proposition 2.1.12. □

Corollaire 2.2.10 *Soient $m \leq d$ et $F \in Ho(s\mathcal{S}^{(n)})$. L'image par $\tilde{o} : Ho(s\mathcal{S}^{(n)}) \longrightarrow Ho(s\mathcal{F}^{(n)})$ de la suite de cofibration : $\mathscr{A}_m^{s(n)}(F) \longrightarrow F \longrightarrow \mathscr{L}_m^{s(n)}(F)$ est la suite de cofibration : $\mathscr{A}_m^{(n)}(\tilde{o}(F)) \longrightarrow \tilde{o}(F) \longrightarrow \mathscr{L}_m^{(n)}(\tilde{o}(F))$.*

En particulier, on a des isomorphismes naturels :
$\tilde{o} \circ \mathscr{A}_m^{s(n)} \simeq \mathscr{A}_m^{(n)} \circ \tilde{o}$ *et* $\tilde{o} \circ \mathscr{L}_m^{s(n)} \simeq \mathscr{L}_m^{(n)} \circ \tilde{o}$.

De plus, $\tilde{o}$ reflète les acycliques.

On a un résultat similaire avec $\tilde{Sym}^l : Ho(s\mathcal{F}^{(n)}) \longrightarrow Ho(s\mathcal{S}^{(n)})$.

Démonstration : Comme $\tilde{o}$ préserve les suites de cofibrations, il s'agit de montrer que $\tilde{o}(\mathscr{A}_m^{s(n)}(F))$ est $h\mathcal{F}_m^{(n)}$-acyclique et que $\tilde{o}(\mathscr{L}_m^{s(n)}(F))$ est $h\mathcal{F}_m^{(n)}$-local.

Ce dernier point relève de la définition de $\mathcal{S}_m^{(n)}$.

D'après la proposition précédente, on peut supposer que $\mathscr{A}_m^{s(n)}(F)$ est un objet en chaque degré le symétrisé d'un $(m+1)$-diagonalisable. C'est alors aussi le cas de $\tilde{o}(\mathscr{A}_m^{s(n)}(F))$ qui est donc en chaque degré un $(m+1)$-diagonalisable de $\mathcal{F}^{(n)}$.

Enfin, en appliquant $\tilde{o}$ à l'acyclisation $\mathscr{A}_m^{s(n)}(F) \longrightarrow F$ et en utilisant le fait que $\tilde{o}$ reflète les isomorphismes, on constate que $\tilde{o}$ reflète les acycliques. □

Ce corollaire justifie que l'on note par la suite $\mathscr{L}_m^{(n)}$ (resp. $\mathscr{A}_m^{(n)}$) pour $\mathscr{L}_m^{s(n)}$ (resp. $\mathscr{A}_m^{s(n)}$).

Corollaire 2.2.11 *Soient $m \leq d$ et $F \in Ho(s\mathcal{S}_d^{(n)})$. L'image par $\tilde{i_d} : Ho(s\mathcal{S}_d^{(n)}) \longrightarrow Ho(s\mathcal{S}^{(n)})$ de la suite de cofibration : $\mathscr{A}_m^{s(n)d}(F) \longrightarrow F \longrightarrow \mathscr{L}_m^{s(n)d}(F)$ est la suite de cofibration : $\mathscr{A}_m^{s(n)}(\tilde{i_d}(F)) \longrightarrow \tilde{i_d}(F) \longrightarrow \mathscr{L}_m^{s(n)}(\tilde{i_d}(F))$.*

En particulier, on a des isomorphismes naturels :
$\tilde{i_d} \circ \mathscr{A}_m^{s(n)d} \simeq \mathscr{A}_m^{s(n)} \circ \tilde{i_d}$ *et* $\tilde{i_d} \circ \mathscr{L}_m^{s(n)d} \simeq \mathscr{L}_m^{s(n)} \circ \tilde{i_d}$.

Démonstration : Ce corollaire se s'obtient de la même manière que le corollaire 2.1.13, grâce à la proposition 2.2.9. Il découle également du corollaire 2.1.13 et du corollaire précédent. □

Ce corollaire justifie que l'on note par la suite $\mathscr{L}_m^{s(n)}$ ou $\mathscr{L}_m^{(n)}$ pour $\mathscr{L}_m^{s(n)d}$ et $\mathscr{A}_m^{s(n)}$ ou $\mathscr{A}_m^{(n)}$ pour $\mathscr{A}_m^{s(n)d}$.

Toutes les considérations de cette section s'appliquent également à $\mathcal{S}'^{(n)}$ et à $\mathcal{S}'^{(n)}_d$, par simple restriction des foncteurs.

2.2.4 Foncteurs symétriques multilinéaires

Définition : Les objets de $\mathcal{S}'^{(n)}$ de degré n sont dits multilinéaires.

On désigne désormais par $\mathscr{M}_n$ la $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-localisation (ou multilinéarisation homotopique) $\mathscr{L}_n^{(n)}$ de $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$ (resp. $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)}_d)$).

Soit $G \in \mathcal{S}'^{(n)}$. A l'unité de l'adjonction (Δ_n^*, cr_n) : $u_{oG} : oG \longrightarrow (cr_n \circ \Delta_n^*)(oG)$, de $\mathcal{F}'^{(n)}$, correspond, par l'adjonction (Sym^l, o), le morphisme de $\mathcal{S}'^{(n)}$: $Sym(G) \longrightarrow (cr_n \circ \Delta_n^*)(oG)$.

Lemme 2.2.12 *(i) On a un isomorphisme :* $S_n \circ Sym \simeq \Delta_n^* : \mathcal{F}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{F}$*, soit, pour tout* G *dans* $\mathcal{F}^{(n)}$ *et tout* V *dans* $\mathcal{E}$ *:*

$$(Sym(G)(V, ..., V))_{\Sigma_n} \simeq G(V, ..., V)$$

(ii) Pour tout foncteur G *multilinéaire, le morphisme ci-dessus est un isomorphisme :* $Sym(G) \simeq (cr_n \circ \Delta_n^*)(G)$.

Démonstration : (i) Par la proposition 2.2.3, on a :

$$S_n(Sym(G))(V) \simeq (\mathbb{Z}[\Sigma_n] \otimes_{\mathbb{Z}} G(V, ..., V))_{\Sigma_n} \xrightarrow{\sim} \Delta_n^*(G)(V)$$

(ii) Soit $(V_1, ..., V_n) \in \mathcal{E}^n$. D'après la proposition 2.1.3, on a :
$G(V_1, ..., V_n) \simeq G(V_1, ..., V_{n-1}, 0) \oplus G(0, ..., 0, V_n) \oplus cr_2^{(n)}(G)((V_1, ..., V_{n-1}, 0), (0, ..., 0, V_n))$, et donc : $G(V_1, ..., V_n) \simeq cr_2^{(n)}(G)((V_1, ..., V_{n-1}, 0), (0, ..., 0, V_n))$ car $G \in \mathcal{S}'^{(n)}$.

En utilisant récursivement la proposition 2.1.3, sur la première variable du foncteur $cr_k^{(n)}$, $k \leq n$, on obtient : $G(V_1, ..., V_n) \simeq cr_n^{(n)}(G)((V_1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, V_n))$.

D'autre part, $G \in \mathcal{S}'^{(n)}_n$ et donc $cr_{n+1}^{(n)}(G) = 0$. A nouveau la proposition 2.1.3 donne, pour $V^j \in \mathcal{E}^n$, $j = 1, ..., n+1$:
$cr_n^{(n)}(G)(V^1, ..., V^{n-1}, V^n \oplus V^{n+1}) \simeq cr_n^{(n)}(G)(V^1, ..., V^{n-1}, V^n) \oplus cr_n^{(n)}(G)(V^1, ..., V^{n-1}, V^{n+1})$.

Par récurrence, les deux remarques qui précède impliquent l'isomorphisme, naturel en $(V_1, ..., V_n) \in \mathcal{E}^n$:

$$\bigoplus_{f \in End(n)} G(V_{f(1)}, ..., V_{f(n)}) \xrightarrow{\sim} G(\oplus V_i, ..., \oplus V_i) = (\nabla_n^* \circ \Delta_n^*)(G)$$

où $End(n)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $\{1, ..., n\}$.

Si $f \notin \Sigma_n$, il existe $i \notin Im(f)$, donc tel que : $e_i(t_f^*(G)) = t_f^*(G)$. D'où $\Pi_n(t_f^*(G)) = 0$, et l'isomorphisme voulu s'obtient comme facteur direct du précédent. □

Proposition 2.2.13 *[Pi] La paire d'adjoints* (S_n, cr_n) *se restreint en une paire d'adjoints :*

$S_n : \mathcal{S}'^{(n)}_n \longleftrightarrow \mathcal{F}_n : cr_n$.

De plus, l'unité : $Id \longrightarrow (cr_n \circ S_n)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration : La proposition 2.1.4 donne : $(\Delta_n^*)^{-1}(\mathcal{F}_d) = \mathcal{F}_d^{(n)}$, et implique donc la restriction de S_n, et de cr_n. Pour tout G multilinéaire, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Sym(G) \arrow[r] \arrow[d] & (cr_n \circ S_n)(Sym(G)) \arrow[dl] \\ (cr_n \circ \Delta_n^*)(G) & \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par les isomorphismes du lemme précédent. On conclut alors en utilisant un début de résolution : $Sym(Q) \longrightarrow Sym(P) \longrightarrow G \longrightarrow 0$, et l'exactitude à droite de $(cr_n \circ S_n)$. □

2.3 Fibres de localisations

Le but de cette section est d'obtenir une identification des fibres de localisations d'un foncteur (théorème 2.3.5).

2.3.1 Plongement

Lemme 2.3.1 *Pour tout $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-local G de $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$, l'unité d'adjonction :*
$u_G : G \to (\tilde{cr}_n \circ \boldsymbol{L}(S_n))(G)$ est un isomorphisme.

Démonstration : On peut supposer G cofibrant. Le diagramme de la démonstration de la proposition 2.2.13 (ci-dessus) est défini également pour $G \in s\mathcal{S}'^{(n)}$. Si G est $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-local, l'exactitude de Sym assure que le morphisme : $Sym(G) \longrightarrow (cr_n \circ \Delta_n^*)(G)$ est une équivalence faible. Il en va donc de même de l'unité $u_{Sym(G)} : Sym(G) \longrightarrow (cr_n \circ S_n)(Sym(G))$, ce qui montre l'énoncé pour les objets Sym-libres et $(\mathcal{S}'^{(n)}_n)$-locaux de $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$.

On considère la résolution bisimpliciale $Sym^\bullet(G) \in s^2\mathcal{S}'^{(n)}$, produite par le cotriple $Sym^l \circ o$, et on note $D(Sym^\bullet(G))$ l'objet simplicial diagonal associé. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'augmentation : $\varepsilon_{G_q} : Sym^\bullet(G_q) \longrightarrow G_q$ est une équivalence faible [W, p.282] entre cofibrants, donc une équivalence d'homotopie forte de $s\mathcal{S}'^{(n)}$. C'est alors aussi le cas de $(cr_n \circ S_n)(\varepsilon_{G_q})$. Les flèches horizontales du diagramme commutatif sont induites par les augmentations des résolutions monadiques, via la diagonale, et sont donc des équivalences faibles :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "u_G"] & D(Sym^\bullet(G)) \arrow[l] \arrow[d, "D(u_{Sym^\bullet(G)})"] \\
(cr_n \circ S_n)(G) & D((cr_n \circ S_n)(Sym^\bullet(G))) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Par les suites spectrales de diagonales, le morphisme : $\pi_*(D(u_{Sym^\bullet(G)}))$ est l'aboutissement de morphismes : $E^1_{p,*} = \pi_*(Sym^{p+1}(G)) \longrightarrow E^1_{p,*} = \pi_*((cr_n \circ S_n)(Sym^{p+1}(G)))$, qui sont des isomorphismes d'après le début de la démonstration. □

Proposition 2.3.2 *La (n-1)-acyclisation : $\mathscr{A}_{n-1} \to Id$ et la co-unité : $c : (\boldsymbol{L}(S_n) \circ \tilde{cr}_n) \to Id$ sont isomorphes sur la sous-catégorie des $h\mathcal{F}_n$-locaux de $Ho(s\mathcal{F})$.*

Démonstration : Soit X dans $Ho(s\mathcal{F})$. Suivant les considérations du chapitre I, il suffit de vérifier que la co-unité c_X est la $(\pi\mathcal{F}_{n-1})$-colocalisation.

D'une part, d'après la proposition 2.2.7, $(\boldsymbol{L}(S_n) \circ \tilde{cr}_n)$ est à valeur dans les $(n-1)$-acycliques.

D'autre part, c_X est un $(\pi\mathcal{F}_{n-1})$-isomorphisme si et seulement si $\tilde{cr}_n(c_X)$ est un isomorphisme. Or, par l'exactitude de cr_n et la proposition 2.2.13, si X est $h\mathcal{F}_n$-local, alors $\tilde{cr}_n(X)$ est $(h\mathcal{S}'^{(n)}_n)$-local. Par le lemme 2.3.1, $u_{\tilde{cr}_n(X)}$ est un isomorphisme de $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$, et comme :

$Id = (\tilde{cr}_n(c_X) \circ u_{\tilde{cr}_n(X)}) : \tilde{cr}_n(X) \to (\tilde{cr}_n \circ \boldsymbol{L}(S_n) \circ \tilde{cr}_n)(X) \to \tilde{cr}_n(X)$,

$\tilde{cr}_n(c_X)$ est alors un isomorphisme. □

Remarque : Si $F \in Ho(s\mathcal{F})$ est $h\mathcal{F}_n$-local, la suite spectrale d'hyperhomologie associée à $\boldsymbol{L}(S_n)$ [W, p.148], s'écrit :
$\pi_{p+q}(\mathscr{A}_{n-1}(F)) \Leftarrow E^2_{p,q} = H_q(\Sigma_n; cr^\delta_n(\pi_p(F)))$.

Théorème 2.3.3 *Soit X, Y dans $Ho(s\mathcal{F})$, X $h\mathcal{F}_n$-local et $h\mathcal{F}_{n-1}$-acyclique. Le foncteur $\tilde{cr}_n : Ho(s\mathcal{F}) \longrightarrow Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$ induit un isomorphisme :*
$\tilde{cr}_{n(X,Y)} : [X, Y] \xrightarrow{\sim} [\tilde{cr}_n(X), \tilde{cr}_n(Y)]$.

En particulier, la paire $(\boldsymbol{L}(S_n), \tilde{cr}_n)$ se restreint en une équivalence de la catégorie des $h\mathcal{F}_n$-locaux et $h\mathcal{F}_{n-1}$-acycliques de $Ho(s\mathcal{F})$ avec la catégorie des multilinéaires homotopiques de $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$.

Démonstration : La composée : $[X, Y] \xrightarrow{\tilde{cr}_n} [\tilde{cr}_n(X), \tilde{cr}_n(Y)] \simeq [(\boldsymbol{L}(S_n) \circ \tilde{cr}_n)(X), Y]$ est égale au morphisme induit par la co-unité : $c_X : (\boldsymbol{L}(S_n) \circ \tilde{cr}_n)(X) \to X$. La flèche $\tilde{cr}_{n(X,Y)}$ est donc un isomorphisme pour tout Y si et seulement si c_X est également un isomorphisme. Or, sous l'hypothèse : X $h\mathcal{F}_n$-local, cela équivaut, par la proposition 2.3.2, à : X $h\mathcal{F}_{n-1}$-acyclique. $\square$

2.3.2 Compatibilité de la déviation et de la localisation

Proposition 2.3.4 *Soient m, n appartenant à $\mathbb{N}$ et F dans $Ho(s\mathcal{F})$. L'image par $\tilde{cr}_n : Ho(s\mathcal{F}) \longrightarrow Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$ de la suite de cofibration : $\mathscr{A}_m(F) \longrightarrow F \longrightarrow \mathscr{L}_m(F)$ est la suite de cofibration : $\mathscr{A}^{(n)}_m(\tilde{cr}_n(F)) \longrightarrow \tilde{cr}_n(F) \longrightarrow \mathscr{L}^{(n)}_m(\tilde{cr}_n(F))$.*

En particulier, on a des isomorphismes naturels :
$\tilde{cr}_n \circ \mathscr{A}_m \simeq \mathscr{A}^{(n)}_m \circ \tilde{cr}_n \quad \text{et} \quad \tilde{cr}_n \circ \mathscr{L}_m \simeq \mathscr{L}^{(n)}_m \circ \tilde{cr}_n$.

Démonstration : Comme $\tilde{cr}_n$ préserve les suites de cofibrations, il s'agit de montrer que $\tilde{cr}_n(\mathscr{A}_m(F))$ est $h\mathcal{S}'^{(n)}_m$-acyclique et $\tilde{cr}_n$ $h\mathcal{S}'^{(n)}_m$-local.

La proposition 2.1.4 et l'exactitude de cr_n assure que $\tilde{cr}_n(X)(\mathscr{L}_m(F))$ est bien $h\mathcal{S}'^{(n)}_m$-local.

Soit A un $h\mathcal{F}_m$-acyclique. Par la proposition 2.1.12, A peut être supposé $(m+1)$-diagonalisable en chaque degré. Par la proposition 2.1.4, on a : $cr_n \circ \Delta^*_{m+1} \simeq \Delta^{(n)*}_{m+1} \circ cr^{(m+1)}_n$, ce qui montre que $cr_n(A)$ est $(m+1)$-diagonalisable en chaque degré dans $s\mathcal{F}'^{(n)}$. Comme l'oubli reflète les acycliques, $\tilde{cr}_n(A)$ est un $h\mathcal{S}'^{(n)}_m$-acyclique. $\square$

Selon les notations du chapitre I, le foncteur $\mathscr{F}_n$ désigne la fibre de la transformation naturelle $\mathscr{L}_n \longrightarrow \mathscr{L}_{n-1}$ de $Ho(s\mathcal{F})$. Le foncteur multilinéarisation homotopique est noté $\mathscr{M}_n$. Le foncteur S_n associe à G dans $\mathcal{F}^{(n)}$ et V dans $\mathcal{E}$ le module $S_n(G)(V) = (G(V, ..., V))_{\Sigma_n}$.La n-ième déviation $cr_n(F)$ d'un foncteur F de $\mathcal{F}$ est noté $F_{(n)}$.

Théorème 2.3.5 *[JMcC2] Pour tout F dans $s\mathcal{F}$ et V dans $\mathcal{E}$, il existe un isomorphisme naturel en F et en V :*

$$\mathscr{F}_n(F)(V) \simeq (\mathscr{M}_n(F_{(n)})(V, ..., V))_{h\Sigma_n} \ .$$

Démonstration : En utilisant les isomorphismes des proposition 2.3.2 et 2.3.4 , on a :
$\mathscr{F}_n = \mathscr{A}_{n-1} \circ \mathscr{L}_n \simeq \boldsymbol{L}(S_n) \circ \tilde{cr}_n \circ \mathscr{L}_n \simeq \boldsymbol{L}(S_n) \circ \mathscr{M}_n \circ \tilde{cr}_n$. $\square$

Corollaire 2.3.6 *Pour tout $X, Y \in Ho(s\mathcal{F})$, on a un isomorphisme :*
$[\mathscr{F}_n(X), Y] \xrightarrow{\sim} [\mathscr{M}_n(\tilde{cr}_n(X)), \tilde{cr}_n(Y)]$.

Démonstration : Le résultat découle directement des théorèmes 2.3.3 et 2.3.5, et de l'adjonction $(\boldsymbol{L}(S_n), \tilde{cr}_n)$. $\square$

Les énoncés de cette section sont également vérifiés si on remplace les catégories $Ho(s\mathcal{F})$ et $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$ par, respectivement, $Ho(s\mathcal{F}_d)$ et $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)}_d)$.

Chapitre 3

Fibres de localisations et modules simpliciaux

La première section est constituée de rappels concernant les modules simpliciaux. La deuxième section fait le lien entre les foncteurs symétriques et les Σ_n-modules simpliciaux. Dans les troisième et quatrième sections, on relie la catégorie homotopique des foncteurs symétriques à celle de certains modules simpliciaux.

A compter de ce chapitre, A est un anneau *commutatif*.

On utilise les considérations du chapitre précédent dans le cas où $\mathcal{E}$ est la catégorie des A-modules libres de rang fini.

3.1 Modules simpliciaux sur un anneau simplicial

3.1.1 Rappels

On désigne par $\mathcal{M}od_A$ la catégorie des A-modules et par $\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ la catégorie des $A[\Sigma_n]$-modules. Si $M, N \in \mathcal{M}od_{\Sigma_n}$, on considère $M \otimes_A N$ et $Hom_A(M, N)$ comme des $A[\Sigma_n]$-modules via l'action diagonale. La catégorie $\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ est ainsi munie d'une structure de catégorie monoidale symétrique fermée $(\mathcal{M}od_{\Sigma_n}, -\otimes_A -, Hom_A(-,-))$.

Soit $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ la catégorie des $A[\Sigma_n]$-modules simpliciaux Le bifoncteur $Map_A(-,-) : s\mathcal{M}od_{\Sigma_n} \times s\mathcal{M}od_{\Sigma_n} \to s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ est défini par : $Map_A(M, N) = Hom_{s\mathcal{M}od_A}(M \otimes \Delta^\bullet, N)$, muni de l'action diagonale. La catégorie $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ possède également une structure de catégorie monoidale symétrique fermée $(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}, -\otimes_A -, Map_A(-,-))$.

De plus, $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ (resp. $s\mathcal{M}od_A$) possède la structure de catégorie de modèle fermée usuelle (cf. Ch I).

On appelle anneau simplicial un objet monoide dans $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$. Soit R un tel anneau simplicial : on note T_R le triple associé. La catégorie des R-modules simpliciaux (à gauche), notée $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R)$, désigne alors la catégorie des T_R-algèbres, et on a une adjonction : $T_R : s\mathcal{M}od_{\Sigma_n} \longleftrightarrow s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R) : o$.

D'après [SS, p.15], $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R)$ possède une structure de catégorie de modèle fermée. L'objet chemin requis ést donné par : $Map_A(A[\Delta^1], -)$. Les fibrations et les équivalences faibles de $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R)$ sont celles de $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ via l'oubli. Les cofibrations sont les morphismes possèdant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales.

Comme dans $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$, tous les objets de $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R)$ sont fibrants. Avec ces structures, l'adjonction (T_R, o) induit une adjonction :
$\boldsymbol{L}(T_R) : Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}) \longleftrightarrow Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R)) : \tilde{o}$.

On note $Hom_{R\Sigma}(M, N)$ l'ensemble des morphismes dans $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R)$.

Via l'oubli, R est aussi un anneau simplicial de $s\mathcal{M}od_A$. On note $s\mathcal{M}od_A(R)$ la catégorie des R-modules simpliciaux et $Hom_R(M, N)$ l'ensemble des morphismes. Si M et N appartiennent à $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R)$, $Hom_R(M, N)$ hérite d'une action (diagonale) de Σ_n et on a un isomorphisme : $Hom_R(M, N)^{\Sigma_n} \simeq Hom_{R\Sigma}(M, N)$.

On a un produit tensoriel : $(-\otimes_R-) : s\mathcal{M}od_A(R) \times s\mathcal{M}od_A(R) \longrightarrow s\mathcal{M}od_A$. Pour tout R-module à droite N, on a une adjonction : $(-\otimes_R N) : s\mathcal{M}od_A(R) \longleftrightarrow s\mathcal{M}od_A : Map_A(N, -)$.

La structure de catégorie monoidale symétrique de $\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ s'étend à la catégorie $\mathcal{G}r_{\Sigma_n}$ des $A[\Sigma_n]$-modules $\mathbb{N}$-gradués. Si Π est un anneau de $\mathcal{G}r_{\Sigma_n}$, on note $\mathcal{G}r_{\Sigma_n}(\Pi)$ la catégorie des Π-modules (T_Π-algèbres).

Les groupes d'homotopie définis sur $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ induisent un foncteur $\pi_* : s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R) \longrightarrow \mathcal{G}r_{\Sigma_n}(\pi_*(R))$.

3.1.2 Suite spectrale d'Adams

Dans cette section, on note : π_* pour $\pi_*(R)$, $gr_\Sigma\pi_*$ la catégorie $\mathcal{G}r_{\Sigma_n}(\pi_*)$ et on pose : $Map_{R\Sigma}(-,-) = Hom_{R\Sigma}(- \otimes \Delta^\bullet, -)$.

Les sphères de $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R)$ sont définies par [Q, II.6.12] :
$$RS^q = A[\Sigma_n] \otimes Coker(R \otimes A[\dot{\Delta}^q] \to R \otimes A[\Delta^q])$$
$$\simeq Coker(R \otimes A[\Sigma_n][\dot{\Delta}^q] \to R \otimes A[\Sigma_n][\Delta^q]).$$
On a $\pi_*(RS^q) \simeq A[\Sigma_n] \otimes \Sigma^q\pi_*$.

La catégorie $gr_\Sigma\pi_*$ est une catégorie abélienne avec un ensemble de générateurs projectifs : $\{\pi_*(RS^q)\}_{q\in\mathbb{N}}$.

Proposition 3.1.1 *Soient $M, N \in s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R)$. Il existe une suite spectrale à deux quadrants :*
$$E_2^{*,*} = Ext^{*,*}_{gr_\Sigma\pi_*}(\pi_*(M), \pi_*(N)) \Longrightarrow [M, \Sigma^* N]$$
de différentielle d_r de bidegré $(r, 1-r)$, qui converge lorsque $\pi_*(N) = 0$ pour $* \gg 0$.

Démonstration : Par [Q, II.6.15], il existe une résolution de M :
$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$
telle que : $K_0 = M$, $K_{q+1} = Ker(P_q \xrightarrow{u_q} K_q)$ avec u_q et $\pi_*(u_q)$ surjectifs, et $\pi_*(P_q)$ module gradué libre de $gr_\Sigma\pi_*$. Les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes courtes : $0 \to K_{q+1} \to P_q \xrightarrow{u_q} K_q \to 0$ induisent un couple exact : $(s \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{Z})$
$$\begin{array}{ccclc} D^{s+1,t-1} & \xrightarrow{i} & D^{s,t} & & D^{s,t} = [K_s, \Sigma^t N] \\ & & \downarrow j & & E^{s,t} = [P_s, \Sigma^t N] \\ D^{s+1,t} & \xleftarrow{k} & E^{s,t} & & d = j \circ k : (1,0) \end{array}$$

Avec les notations de la proposition 3.2 du chapitre 1 (cf. [McC, p.39]) :

Pour $r > s$, $B_r^{s,t} = j(Ker(i^{r-1} : D^{s,t} \to D^{s+r,t}))$ est indépendant de r, donc : $E_\infty^{s,t} \simeq Lim_{r>s} E_r^{s,t}$. D'où la suite exacte courte :

$$0 \to D^{s,t}/(Ker(i^s : D^{s,t} \to D^{0,t+s}) + i(D^{s+1,t-1})) \to E_\infty^{s,t}$$
$$\to (\cap_r Im(i^r : D^{s+1+r,t-1} \to D^{s+1,t})) \cap Ker(i : D^{s-1,t} \to D^{s,t+1}) \to 0$$

Soit la filtration de $D^{0,t} = [M, \Sigma^t N]$: $\Psi_t^s = Im(D^{s,t-s} \to D^{0,t})$,
et $K_t^s = Ker(D^{s,t-s} \to D^{0,t})$.
Ceci donne : $\Psi_t^s/\Psi_t^{s+1} \simeq D^{s,t-s}/(K_t^s + i(D^{s+1,t-s-1}))$.

Avec l'hypothèse : $\pi_*(N) = 0$ pour $* \gg 0$, la filtration est finie et on a :
$(\cap_r Im(i^r : D^{s+1+r,t-1} \to D^{s+1,t})) \cap Ker(i : D^{s-1,t} \to D^{s,t+1}) \simeq 0$,
d'où : $E_\infty^{s,t-s} \simeq \Psi_t^s/\Psi_t^{s+1}$.

D'autre part, $E_1^{s,t} = [P_s, \Sigma^t N]$, et la surjectivité de $\pi_*(u_q)$ entraine que la suite exacte :

$$\cdots \to \pi_*(P_n) \to \pi_*(P_{n-1}) \to \cdots \to \pi_*(P_1) \to \pi_*(P_0) \to \pi_*(M) \to 0$$

est une résolution libre dans $gr_\Sigma \pi_*$. Par construction, $P_s \simeq \bigoplus_i RS^{n_i}$ dans $Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R))$.
On a les isomorphismes :

$$E_1^{s,t} \simeq [\bigoplus_i RS^{n_i}, \Sigma^t N] \simeq \prod_i \pi_0(Map_{R\Sigma}(RS^{n_i}, \Sigma^t N)) \simeq \prod_i \pi_{n_i}(\Sigma^t N)$$
$$\simeq \prod_i Hom_{gr_\Sigma \pi_*}(\pi_{*-n_i}(A), \pi_*(\Sigma^t N)) \simeq Hom_{gr_\Sigma \pi_*}(\bigoplus_i \pi_{*-n_i}(R), \Sigma^t \pi_*(N))$$
$$E_1^{s,t} \simeq Hom^t_{gr_\Sigma \pi_*}(\pi_*(P_s), \pi_*(N)).$$

Ces isomorphismes font correspondre à $d_1 = j \circ k : [P_s, \Sigma^t N] \to [P_{s-1}, \Sigma^t N]$ l'image par $Hom^t_{gr_\Sigma \pi_*}(-, \pi_*(N))$ de la composée : $\partial : P_s \xrightarrow{u_s} K_s \hookrightarrow P_{s-1}$.
D'où : $E_2^{t,*} = Ext^{t,*}_{gr_\Sigma \pi_*}(\pi_*(M), \pi_*(N))$. □

3.2 Foncteurs symétriques et Σ_n-modules

Soit le foncteur $\boxtimes : (\mathcal{F})^n \longrightarrow \mathcal{S}^{(n)}$ qui, au n-uplet $(F_1, ..., F_n)$ associe le foncteur :
$(E_1, ..., E_n) \mapsto F_1(E_1) \otimes ... \otimes F_n(E_n)$.
Par restriction, on a un foncteur de $(\mathcal{F}')^n$ dans $\mathcal{S}'^{(n)}$. On note $F^{\boxtimes n}$ le foncteur $F \boxtimes ... \boxtimes F$, avec n facteur.

Soit $\bar{P} = Ker(P_A \to P_0)$ (cf. Ch II). On note : Λ^n le foncteur n-ième puissance exterieure, $T^{\boxtimes n}$ pour $Id^{\boxtimes n}$ et $T^n = \Delta_n^*(T^{\boxtimes n})$ le foncteur n-ième puissance tensorielle. Dans $\mathcal{S}'^{(n)}$, on a les isomorphismes [Pi] : $cr_n(\bar{P}) \simeq \bar{P}^{\boxtimes n}$, $cr_n(T^n) \simeq Sym(T^{\boxtimes n})$, $cr_n(\Lambda^n) \simeq sgn \otimes T^{\boxtimes n}$, où sgn est le Σ_n-module A muni de l'action signature (la stucture symétrique est précisée au paragraphe 3.2.3).

Le corollaire 1.9 du chapitre II donne un isomorphisme de $\mathcal{F}'^{(n)}$: $cr_n(m_d(\bar{P})) \simeq m_d^{(n)}(cr_n(\bar{P}))$. On muni $m_d^{(n)}(\bar{P}^{\boxtimes n})$ de la structure de foncteur symétrique rendant cet isomorphisme symétrique.

3.2.1 Aspects discrets

Soient $F, G \in \mathcal{S}'^{(n)}$. En utilisant les structures symétriques de F et G, on définit un ensemble d'automorphismes de $Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F, G)$: $\{m_\sigma^{F,G}\}_{\sigma \in \Sigma_n}$ par :
$m_\sigma^{F,G} = (a_\sigma^G)_* \circ t_\sigma^* \circ (a_{\sigma^{-1}}^F)^*$:
$Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F, G) \longrightarrow Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(t_{\sigma^{-1}}^*(F), G) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F, t_\sigma^*(G)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F, G)$.

Proposition 3.2.1 *[Pi] Soient $F, G \in \mathcal{S}'^{(n)}$. Les morphismes $\{m_\sigma^{F,G}\}_{\sigma\in\Sigma_n}$ sont des transformations naturelles en $(F,G) \in \mathcal{S}'^{(n)^{op}} \times \mathcal{S}'^{(n)}$ du A-module $Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G)$ dans lui-même, qui le munissent d'une structure de $A[\Sigma_n]$-module, compatible avec la composition.*

De plus, on a un isomorphisme naturel : $(Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G))^{\Sigma_n} \simeq Hom_{\mathcal{S}'^{(n)}}(F,G)$.

Démonstration : On remarque avant tout que l'on a les égalités suivantes :

$$m_\sigma^{F,G} = (a_\sigma^G)_* \circ t_\sigma^* \circ (a_{\sigma^{-1}}^F)_* = (a_\sigma^G)_* \circ (t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^F))^* \circ t_\sigma^* = (t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^F))^* \circ (a_\sigma^G)_* \circ t_\sigma^*.$$

On montre que les automorphismes : $\{m_\sigma^{F,G}\}_{\sigma\in\Sigma_n}$ constituent une action de Σ_n sur $Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G)$.

D'une part, pour $\sigma = 1$, on a : $m_1^{F,G} = Id$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} m_\sigma^{F,G} \circ m_\tau^{F,G} &= (a_\sigma^G)_* \circ (t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^F))^* \circ t_\sigma^* \circ (a_\tau^G)_* \circ (t_\tau^*(a_{\tau^{-1}}^F))^* \circ t_\tau^* \\ &= (a_\sigma^G)_* \circ (t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^F))^* \circ (t_\sigma^*(a_\tau^G))_* \circ (t_\sigma^*(t_\tau^*(a_{\tau^{-1}}^F)))^* \circ t_\sigma^* \circ t_\tau^* \\ &= (a_\sigma^G \circ t_\sigma^*(a_\tau^G))_* \circ (t_{\sigma\tau}^*(a_{\tau^{-1}}^F) \circ t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^F))^* \circ t_{\sigma\tau}^* \\ &= (a_{\sigma\tau}^G)_* \circ t_{\sigma\tau}^*(a_{\tau^{-1}}^F \circ t_{\tau^{-1}}^*(a_{\sigma^{-1}}^F)) \circ t_{\sigma\tau}^* \\ &= (a_{\sigma\tau}^G)_* \circ t_{\sigma\tau}^* \circ (a_{(\sigma\tau)^{-1}}^F)^* \\ m_\sigma^{F,G} \circ m_\tau^{F,G} &= m_{\sigma\tau}^{F,G} \end{aligned}$$

On vérifie que l'action est donc bien compatible avec la composition. Soient $f \in Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G)$ et $g \in Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(G,H)$.

$$\begin{aligned} m_\sigma^{F,H}(g\circ f) &= ((a_\sigma^H)^* \circ (t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^F))^* \circ t_\sigma^*)(g\circ f) \\ &= a_\sigma^H \circ t_\sigma^*(g) \circ t_\sigma^*(f) \circ t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^F) \\ &= a_\sigma^H \circ t_\sigma^*(g) \circ t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^G) \circ a_\sigma^G \circ t_\sigma^*(f) \circ t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^F) \\ m_\sigma^{F,H}(g\circ f) &= m_\sigma^{G,H}(g) \circ m_\sigma^{F,G}(f) \end{aligned}$$

La dernière assertion ce montre comme suit. Un morphisme $f \in Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G)$ est un morphisme de foncteurs symétriques si et seulement si, pour tout $\sigma \in \Sigma_n$: $a_\sigma^G \circ t_\sigma^*(f) = f \circ a_\sigma^F$. C'est équivalent à :

$$f = a_\sigma^G \circ t_\sigma^*(f) \circ t_\sigma^*(a_{\sigma^{-1}}^F) = ((a_\sigma^G)_* \circ t_\sigma^* \circ (a_{\sigma^{-1}}^F)^*)(f) f = m_\sigma^{F,G}(f),$$

soit : $f \in (Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G))^{\Sigma_n}$.

Pour vérifier la naturalité, on considère $g \in Hom_{\mathcal{S}'^{(n)}}(G,G')$, et la flèche induite : $g_* : Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G) \to Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G')$.

$$g_* \circ m_\sigma^{F,G} = (g \circ a_\sigma^G)_* \circ t_\sigma^* \circ a_{\sigma^{-1}}^F = (a_\sigma^{G'} \circ t_\sigma^*(g))_* \circ t_\sigma^* \circ a_{\sigma^{-1}}^F = (a_\sigma^G)_* \circ t_\sigma^* \circ g_* \circ a_{\sigma^{-1}}^F = m_\sigma^{F,G'} \circ g_*$$

Des égalités similaires pour la variable contravariante achèvent de vérifier la naturalité annoncée. □

Proposition 3.2.2 *Pour tout $G \in \mathcal{S}'^{(n)}$, on a un isomorphisme Σ_n-équivariant :*

$$Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(\bar{P}^{\boxtimes n}, G) \simeq \Delta_n^*(G)(A).$$

Démonstration : En composant l'isomorphisme de l'adjonction (cr_n, Δ_n^*) et l'isomorphisme de Yoneda, qui sont équivariant, on obtient :

$$Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(\bar{P}^{\boxtimes n}, G) \simeq Hom_{\mathcal{F}'}(\bar{P}, \Delta_n^*(G)) \simeq \Delta_n^*(G)(A), \ \square$$

3.2.2 Aspects simpliciaux

La catégorie $s\mathcal{S}'^{(n)}$ (resp. $s\mathcal{F}'^{(n)}$) possède une structure de catégorie de modèle simplicial fermée [Q]. En particulier, on a un foncteur : $Map_{s\mathcal{S}'^{(n)}} : s\mathcal{S}'^{(n)} \times s\mathcal{S}'^{(n)} \longrightarrow s\mathcal{M}od_A$, vérifiant l'axiome S.M.7 , explicitement : $Map_{s\mathcal{S}'^{(n)}}(F,G) = Hom_{s\mathcal{S}'^{(n)}}(F \otimes \Delta^{\cdot}, G)$. On a une composition : $\circ : Map_{s\mathcal{S}'^{(n)}}(F,G) \otimes Map_{s\mathcal{S}'^{(n)}}(G,H) \longrightarrow Map_{s\mathcal{S}'^{(n)}}(F,H)$.

On peut définir un ensemble d'automorphismes de $Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G)$: $\{m_\sigma^{F,G}\}_{\sigma\in\Sigma_n}$ de la même manière que dans le paragraphe précédent.

Proposition 3.2.3 *Soient $F, G \in s\mathcal{S}'^{(n)}$. Les morphismes $\{m_\sigma^{F,G}\}_{\sigma\in\Sigma_n}$ sont des transformations naturelles en $(F,G) \in (s\mathcal{S}'^{(n)})^{op} \times s\mathcal{S}'^{(n)}$ du A-module simplicial $Map_{s\mathcal{S}'^{(n)}}(F,G)$ dans lui-même, qui le munissent d'une structure de $A[\Sigma_n]$-module, compatible avec la composition.*

De plus, $(Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(F,G))^{\Sigma_n} \simeq Map_{s\mathcal{S}'^{(n)}}(F,G)$. $\square$

3.2.3 Foncteurs symétriques multilinéaires

Le foncteur de $\mathcal{F}^{(n)}$ dans $\mathcal{M}od_A$ défini par : $F \mapsto \Delta_n^*(F)(A)$ induit un isomorphisme entre les catégories $\mathcal{F}_0^{(n)}$ et $\mathcal{M}od_A$. On identifie ces deux catégories.

Pour $M \in \mathcal{M}od_A$, on a, pour tout $\sigma \in \Sigma_n$: $t_\sigma^*(M) = M$, et donc $Sym(M) \simeq \mathbb{Z}[\Sigma_n]\otimes_{\mathbb{Z}} M$, ce qui permet d'identifier $\mathcal{S}_0^{(n)}$ et $\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$.

Soient $F, G \in \mathcal{S}^{(n)}$. Le foncteur $F \otimes G$ est muni d'une structure de foncteur symétrique diagonale donnée par le morphisme : $a^{F\otimes G} : Sym(F \otimes G) \longrightarrow F \otimes G$ induit par $a^F \otimes a^G$: $t_\sigma^*(F \otimes G) = t_\sigma^*(F) \otimes t_\sigma^*(G) \longrightarrow F \otimes G$.

On définit la paire de foncteur :

$M^{(n)} : \mathcal{S}'^{(n)}_n \longleftrightarrow \mathcal{M}od_{\Sigma_n} : T^{(n)}$ (resp. $M_+^{(n)} : \mathcal{S}'^{(n)} \longleftrightarrow \mathcal{M}od_{\Sigma_n} : T_+^{(n)}$)

par :

$M^{(n)}(F) = Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(T^{\boxtimes n}, oF)$ et $T^{(n)}(M) = (M \otimes T^{\boxtimes n})$.

(resp. $M_+^{(n)}(F) = Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(\bar{P}^{\boxtimes n}, oF)$ et $T_+^{(n)}(M) = (M \otimes \bar{P}^{\boxtimes n})$).

Proposition 3.2.4 *La paire $(T^{(n)}, M^{(n)})$ (resp. $(T_+^{(n)}, M_+^{(n)})$) est une paire d'adjoint.*

Démonstration : Soient $M \in \mathcal{M}od_{\Sigma_n}$ et $G \in \mathcal{S}'^{(n)}_n$. Pour tout $L \in \mathcal{E}^n$, la proposition 3.2.1 et l'évaluation en L munissent $Hom_A(T^{\boxtimes n}(L), G(L))$ et $Hom_A(M \otimes T^{\boxtimes n}(L), G(L))$ d'une action du groupe symétrique, et on vérifie que l'isomorphisme d'adjonction :

$Hom_A(M \otimes T^{\boxtimes n}(L), G(L)) \simeq Hom_A(M, Hom_A(T^{\boxtimes n}(L), G(L)))$

est Σ_n-équivariant. Celui-ci induit un isomorphisme équivariant :

$Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(M \otimes T^{\boxtimes n}, G) \simeq Hom_A(M, Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(T^{\boxtimes n}, G))$.

En prenant les co-invariants, on obtient :

$Hom_{\mathcal{S}'^{(n)}}(M \otimes T^{\boxtimes n}, G) \simeq Hom_{\Sigma_n}(M, Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(T^{\boxtimes n}, G))$. $\square$

Par la proposition 3.2.2, on a, pour tout $G \in \mathcal{S}'^{(n)}_n$: $M_+^{(n)}(G) \simeq M^{(n)}(G) \simeq \Delta_n^*(G)(A)$.

Proposition 3.2.5 *[Pi] L'adjonction : $T^{(n)} : \mathcal{M}od_{\Sigma_n} \longleftrightarrow \mathcal{S}'^{(n)}_n : M^{(n)}$ constitue une équivalence de catégorie.*

Démonstration : Soit $G \in \mathcal{S}'^{(n)}_n$. Par multilinéarité, la co-unité c_G est un isomorphisme si et seulement si $\Delta_n^*(c_G)(A)$ en est un également. Par l'isomorphisme : $M^{(n)}(c_G) \simeq \Delta_n^*(c_G)(A)$, et comme : $u_{M^{(n)}(G)} \circ M^{(n)}(c_G) = Id_{M^{(n)}(G)}$, on est ramené à montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}od_{\Sigma_n}$, l'unité u_M est un isomorphisme. Or :

$(M^{(n)} \circ T^{(n)})(M) = Hom_{\mathcal{F}'^{(n)}}(T^{\boxtimes n}, M \otimes T^{\boxtimes n}) \simeq \Delta_n^*(M \otimes T^{\boxtimes n})(A) \simeq M$. $\square$

3.3 Plongement

Soit $\bar{P}^{\boxtimes n} \to Q^{(n)}$ une $h\mathcal{S'}_n^{(n)}$-localisation de $\bar{P}^{\boxtimes n}$ dans $Ho(s\mathcal{S'}^{(n)})$ tel que $Q^{(n)}$ soit un *cofibrant* de $s\mathcal{F'}^{(n)}$. En particulier, $Q^{(n)} \simeq \mathscr{M}_n(\bar{P}^{\boxtimes n})$. Un tel morphisme existe bien, car on peut prendre $Q^{(n)}$ cofibrant dans $s\mathcal{S'}^{(n)}$ et l'oubli préserve les cofibrants.

Via l'oubli, c'est également une $\mathcal{F'}_n^{(n)}$-localisation de $\bar{P}^{\boxtimes n}$ dans $Ho(s\mathcal{F'}^{(n)})$. Comme $\bar{P}^{\boxtimes n}$ est cofibrant dans $s\mathcal{F'}^{(n)}$, cette localisation peut être représentée par un morphisme de $s\mathcal{F'}^{(n)}$.

On note $R^{(n)} = Map_{s\mathcal{F'}^{(n)}}(Q^{(n)}, Q^{(n)})$. Au vu du paragraphe précédent, $R^{(n)}$ est un anneau de $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$, et, pour tout $G \in s\mathcal{F'}^{(n)}$, $Map_{s\mathcal{F'}^{(n)}}(Q^{(n)}, G)$ est un $R^{(n)}$-module à gauche.

Définition : On note $\mathcal{M}^{(n)}$ le foncteur : $Map_{s\mathcal{F'}^{(n)}}(Q^{(n)}, o-) : s\mathcal{S'}^{(n)} \longrightarrow s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)})$.

L'anneau simplicial $R^{(n)} = Map_{s\mathcal{F'}^{(n)}}(Q^{(n)}, Q^{(n)})$ peut être considéré comme un monoide de $s\mathcal{S'}^{(n)}$. Ceci munit $Q^{(n)}$ d'une stucture de $R^{(n)}$-module à droite.

Définition : Le foncteur : $\mathcal{T}^{(n)} : s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)}) \longrightarrow s\mathcal{S'}^{(n)}$, est définit, pour tout $M \in s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)})$, par :

$$\mathcal{T}^{(n)}(M) = M \otimes_{R^{(n)}} Q^{(n)} = Coker(M \otimes R^{(n)} \otimes Q^{(n)} \longrightarrow M \otimes Q^{(n)}) \ ,$$

avec l'action diagonale sur le produit tensoriel.

Lemme 3.3.1 *Les foncteurs* $\mathcal{M}^{(n)} : F \mapsto Map_{s\mathcal{F'}^{(n)}}(Q^{(n)}, oF)$ *et* $\mathcal{T}^{(n)} : M \mapsto M \otimes_{R^{(n)}} Q^{(n)}$ *forment une paire d'adjoints* $(\mathcal{T}^{(n)}, \mathcal{M}^{(n)})$.

Démonstration : Soient $M \in s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)})$ et $G \in s\mathcal{S'}^{(n)}$. Pour tout $L \in \mathcal{E}^n$, la proposition 3.2.3 et l'évaluation en L munissent $Hom_{s\mathcal{M}od_A}(M \otimes_{R^{(n)}} Q^{(n)}(L), G(L))$ et $Map_A(Q^{(n)}(L), G(L))$ d'une action du groupe symétrique, et on vérifie que l'isomorphisme d'adjonction :

$Hom_{s\mathcal{M}od_A}(M \otimes_{R^{(n)}} Q^{(n)}(L), G(L)) \simeq Hom_{R^{(n)}}(M, Map_A(Q^{(n)}(L), G(L)))$

est Σ_n-équivariant. Celui-ci induit un isomorphisme équivariant :

$Hom_{\mathcal{F'}^{(n)}}(\mathcal{T}^{(n)}(M), G) \simeq Hom_{R^{(n)}}(M, \mathcal{M}^{(n)}(G))$.

En prenant les co-invariants, on obtient :

$Hom_{\mathcal{S'}^{(n)}}(\mathcal{T}^{(n)}(M), G) \simeq Hom_{R^{(n)}\Sigma}(M, \mathcal{M}^{(n)}(G))$. $\square$

Proposition 3.3.2 *La paire d'adjoints* $(\mathcal{T}^{(n)}, \mathcal{M}^{(n)})$ *induit une adjonction :*

$\boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n)}) : Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)})) \longleftrightarrow Ho(s\mathcal{S'}^{(n)}) : \tilde{\mathcal{M}}^{(n)}$.

Démonstration : Comme $Q^{(n)}$ est cofibrant, on a :

$\pi_*(\mathcal{M}^{(n)}) = \pi_*(Map_{s\mathcal{F'}^{(n)}}(Q^{(n)}, o-)) \simeq [Q^{(n)}, \Omega^* o-]$.

Le foncteur $\mathcal{M}^{(n)}$ préserve donc les équivalence faibles, ce qui assure l'existence de $\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}$. Par ailleurs, à nouveau car $Q^{(n)}$ est cofibrant, l'axiome S.M.7 montre que $\mathcal{M}^{(n)}$ préserve les fibrations et les fibrations triviales. Ceci implique l'existence de $\boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n)})$ et de l'adjonction. $\square$

Lemme 3.3.3 *Le foncteur* $\boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n)})$ *est à valeur dans les* $h\mathcal{S'}_n^{(n)}$*-locaux.*

Démonstration : Soit M un cofibrant de $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)})$. Il suffit de vérifier que $\mathcal{T}^{(n)}(M)$ est $h\mathcal{F}_n$-local, soit $\tilde{D}^{(n)}_{n+1}(\mathcal{T}^{(n)}(M))$ est faiblement équivalent à zéro.

Or, on a un isomorphisme : $\tilde{D}^{(n)}_{n+1}(M\otimes_{R^{(n)}}Q^{(n)}) \simeq M\otimes_{R^{(n)}}\tilde{D}^{(n)}_{n+1}(Q^{(n)})$, le foncteur $(M\otimes_{R^{(n)}}-)$ préserve les équivalences faibles, et $Q^{(n)}$ est $h\mathcal{F}_n$-local. $\square$

Lemme 3.3.4 *Soit G $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-local. Le morphisme $\bar{P}^{\boxtimes n} \longrightarrow Q^{(n)}$ induit une équivalence faible naturelle et Σ_n-équivariante :* $\mathcal{M}^{(n)}(G) = Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(Q^{(n)}, G) \longrightarrow Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(\bar{P}^{\boxtimes n}, G)$.

Démonstration : Comme $\bar{P}^{\boxtimes n}$ et $Q^{(n)}$ sont cofibrants, le morphisme :
$\pi_*(Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(Q^{(n)}, G)) \longrightarrow \pi_*(Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(\bar{P}^{\boxtimes n}, G))$
est isomorphe au morphisme : $[Q^{(n)}, \Omega^* G] \longrightarrow [\bar{P}^{\boxtimes n}, \Omega^* G]$. La flèche $\bar{P}^{\boxtimes n} \longrightarrow Q^{(n)}$ étant une $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-localisation, et G $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-local, ce dernier morphisme est un isomorphisme. $\square$

Théorème 3.3.5 *Soit $X, Y \in Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$, X $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-local.*
Le foncteur $\tilde{\mathcal{M}}^{(n)} : Ho(s\mathcal{S}'^{(n)}) \longrightarrow Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)}))$ induit un isomorphisme :

$$\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}_{(X,Y)} : [X, Y] \xrightarrow{\sim} [\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}(X), \tilde{\mathcal{M}}^{(n)}(Y)] \ .$$

De plus, la paire $(\boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n)}), \tilde{\mathcal{M}}^{(n)})$ se restreint en une équivalence de la catégorie des multilinéaires homotopiques de $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$ avec la catégorie $Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)}))$.

Démonstration : La composée : $[X, Y] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}_{(X,Y)}} [\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}(X), \tilde{\mathcal{M}}^{(n)}(Y)] \simeq [(\boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n)})\circ\tilde{\mathcal{M}}^{(n)})(X), Y]$ est égale au morphisme induit par la co-unité : $c_X : (\boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n)}) \circ \tilde{\mathcal{M}}^{(n)})(X) \to X$. La flèche $\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}_{(X,Y)}$ est donc un isomorphisme si et seulement si c_X l'est également.
D'après le lemme 3.3.4, il est équivalent de montrer que $\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}(c_X)$ est un isomorphisme.
Comme l'adjonction $(\boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n)}), \tilde{\mathcal{M}}^{(n)})$ donne :
$Id = (\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}(c_X) \circ u_{\tilde{\mathcal{M}}^{(n)}(X)}) : \tilde{\mathcal{M}}^{(n)}(X) \to (\tilde{\mathcal{M}}^{(n)} \circ \boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n)}) \circ \tilde{\mathcal{M}}^{(n)})(X) \to \tilde{\mathcal{M}}^{(n)}(X)$,
on est ramené à vérifier que, pour tout $M \in s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)})$ cofibrant, l'unité d'adjonction : $u_M : M \longrightarrow (\mathcal{M}^{(n)} \circ \mathcal{T}^{(n)})(M)$ est une équivalence faible.
On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "u_M"'] & \simeq M\otimes_{R^{(n)}} Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(Q^{(n)}, Q^{(n)}) \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_{R^{(n)}} Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(\bar{P}^{\boxtimes n}, Q^{(n)}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & M\otimes_{R^{(n)}} \Delta^*_n(Q^{(n)})(A) \arrow[d, "\sim"] \\
& Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(Q^{(n)}, M\otimes_{R^{(n)}} Q^{(n)}) \arrow[r] & Map_{s\mathcal{F}'^{(n)}}(\bar{P}^{\boxtimes n}, M\otimes_{R^{(n)}} Q^{(n)}) \arrow[r, "\sim"] & \Delta^*_n(M\otimes_{R^{(n)}} Q^{(n)})(A)
\end{tikzcd}$$

Le carré de droite est constitué d'isomorphismes, les flèches horizontales provenant essentiellement des isomorphismes de Yoneda (cf. proposition 3.2.2). Les flèches horizontales du carré central sont des équivalences faibles par le lemme précédent (3.3.4), et car M est cofibrant pour la flèche du haut. L'unité u_M est donc équivalence faible. $\square$

Corollaire 3.3.6 *La sous-catégorie pleine de $Ho(s\mathcal{F})$ formée par les foncteurs de la n-ième fibre (i.e. : n-locaux et $(n-1)$-acycliques) est équivalente à la catégorie $Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n)}))$.*
$\square$

3.4 Cas des foncteurs polynômiaux

A l'instar du plongement considéré au chapitre II, les considérations des sections précédentes s'adaptent au cadre des foncteurs polynômiaux de degré inférieur ou égal à d.

Soit $m_d^{(n)}(\bar{P}^{\boxtimes n}) \to Q^{(n,d)}$ une $h\mathcal{S'}_n^{(n)}$-localisation de $m_d^{(n)}(\bar{P}^{\boxtimes n})$ dans $Ho(s\mathcal{S'}_d^{(n)})$ tel que $Q^{(n,d)}$ soit un *cofibrant* de $s\mathcal{F'}_d^{(n)}$. En particulier, $Q^{(n,d)} \simeq \mathscr{M}_n(m_d^{(n)}(\bar{P}^{\boxtimes n}))$.

On note $R^{(n,d)} = Map_{s\mathcal{F'}_d^{(n)}}(Q^{(n,d)}, Q^{(n,d)})$. A nouveau, $R^{(n,d)}$ est un anneau de $s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}$, et, pour tout $G \in s\mathcal{F'}^{(n)}$, $Map_{s\mathcal{F'}_d^{(n)}}(Q^{(n,d)}, G)$ est un $R^{(n,d)}$-module.

On note $\mathcal{M}^{(n,d)}$ le foncteur : $Map_{s\mathcal{F'}_d^{(n)}}(Q^{(n,d)}, o-) : s\mathcal{S'}_d^{(n)} \longrightarrow s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n,d)})$.

Considérant $R^{(n,d)} = Map_{s\mathcal{F'}^{(n)}}(Q^{(n,d)}, Q^{(n,d)})$ comme un monoide de $s\mathcal{S'}_d^{(n)}$, celui-ci munit $Q^{(n)}$ d'une stucture de $R^{(n)}$-module à droite.

On définit un foncteur $\mathcal{T}^{(n,d)} : s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n,d)}) \longrightarrow s\mathcal{S'}_d^{(n)}$, en posant, pour tout $M \in s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n,d)}) : \mathcal{T}^{(n,d)}(M) = M \otimes_{R^{(n,d)}} Q^{(n,d)}$, avec l'action diagonale sur le produit tensoriel.

Théorème 3.4.1 *Soit $X, Y \in Ho(s\mathcal{S'}_d^{(n)})$, X $h\mathcal{S'}_n^{(n)}$-local.*
Le foncteur $\tilde{\mathcal{M}}^{(n,d)} : Ho(s\mathcal{S'}_d^{(n)}) \longrightarrow Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n,d)}))$ induit un isomorphisme :

$$\tilde{\mathcal{M}}^{(n,d)}_{(X,Y)} : [X, Y] \xrightarrow{\sim} [\tilde{\mathcal{M}}^{(n,d)}(X), \tilde{\mathcal{M}}^{(n,d)}(Y)] \ .$$

De plus, la paire $(\boldsymbol{L}(\mathcal{T}^{(n,d)}), \tilde{\mathcal{M}}^{(n,d)})$ se restreint en une équivalence de la catégorie des multilinéaires homotopiques de $Ho(s\mathcal{S'}_d^{(n)})$ avec la catégorie $Ho(s\mathcal{M}od_{\Sigma_n}(R^{(n,d)}))$. $\square$

Chapitre 4

Quelques calculs

Dans un premier temps, on rappelle une construction particulière de la linéarisation homotopique, nommée stabilisation. On l'utilise ensuite pour expliciter, dans le cas du corps $\mathbb{F}_2$, quelques algèbres et modules définis dans le chapitre 3.

Dans ce chapitre, l'anneau A est un *corps commutatif*.

4.1 Préliminaires

4.1.1 Stabilisation

On rappelle dans cette section une construction décrite dans [FS].

Soit le foncteur $B : s\mathcal{F}' \longrightarrow s\mathcal{F}'$ obtenu en précomposant par la suspension de l'identité : $BF = F \circ \Sigma I$. Pour tout entier n, on a un morphisme : $\Sigma B^n F \to B^{n+1}F$. Comme l'unité de l'adjonction (Σ, Ω) est un isomorphisme, en appliquant le foncteur Ω^{n+1} à ce morphisme, on obtient le système :

$$F \to \Omega BF \to \cdots \to \Omega^n B^n F \to \Omega^{n+1} B^{n+1} F \to \cdots$$

Définition : Le foncteur stabilisation $st : s\mathcal{F}' \longrightarrow s\mathcal{F}'$ est défini par : $st(F) = Colim_n \Omega^n B^n F$.

Ce foncteur préserve les degrés et se restreint donc en : $st : s\mathcal{F}'_d \longrightarrow s\mathcal{F}'_d$. Le foncteur stabilisation préserve les cofibrants, les suites exactes, et induit en particulier un foncteur $st : Ho(s\mathcal{F}') \longrightarrow Ho(s\mathcal{F}')$ (resp. $st : Ho(s\mathcal{F}'_d) \longrightarrow Ho(s\mathcal{F}'_d)$).

Théorème 4.1.1 *[FS] La transformation naturelle de $Ho(s\mathcal{F}')$ (resp. $Ho(s\mathcal{F}'_d)$) : $F \to st(F)$ est la linéarisation homotopique, i.e. : la $h\mathcal{F}'_1$-localisation $\mathscr{M}_1$.* $\square$

On note $\pi_*^{st}(F)$ pour $\pi_*(st(F))(A)$. Il est également indiqué dans [FS] que pour $n > k$, $\pi_k(st(F)) \simeq \pi_{k+n}(B^n F)$.

4.1.2 Constructions d'objets "sphères"

Le foncteur stabilisation fournit des modèles d'objets locaux permettant de définir les anneaux simpliciaux et catégories de modules considérés au chapitre 3 (dont on reprend les notations).

On pose : $Q^{(1)} = st(\bar{P})$ et $Q^{(1,d)} = st(m_d(\bar{P}))$. Comme le foncteur stabilisation préserve les cofibrants, $Q^{(1)}$ et $Q^{(1,d)}$ sont bien cofibrants, respectivement dans $s\mathcal{F}'$ et $s\mathcal{F}'_d$. Le théorème 4.1.1 assure que se sont les localisés requis.

On pose également : $Q^{(n)} = (Q^{(1)})^{\boxtimes n}$. Ce choix est justifié par la proposition 4.2.1.

Comme dans le chapitre 3, on note : $R^{(n)} = Map(Q^{(n)}, Q^{(n)})$ et $R^{(n,d)} = Map(Q^{(n,d)}, Q^{(n,d)})$. On note les $A[\Sigma_n]$-algèbres graduées : $\mathcal{A}_*^{(n)} = \pi_*(R^{(n)})$, $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}_*^{(1)}$ et $\mathcal{A}_*^{(n,d)} = \pi_*(R^{(n,d)})$.

4.2 Produit tensoriel et multilinéarisation homotopique

On désigne encore par $\mathscr{M}_n$ (resp. $\mathscr{A}_n^{(n)}$) la localisation (resp. acyclisation) par rapport aux multilinéaires dans $Ho(s\mathcal{F}'^{(n)})$.

Proposition 4.2.1 *Soient $(F_1, \cdots, F_n) \in (\mathcal{F}')^n$ et, pour tout $i = 1, ..., n$, la linéarisation homotopique : $\eta_i : F_i \to \mathscr{M}_1(F_i)$. La flèche : $\boxtimes\eta_i : F_1 \boxtimes \cdots \boxtimes F_n \longrightarrow \mathscr{M}_1(F_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathscr{M}_1(F_n)$ est la $h\mathcal{F}'^{(n)}_n$-localisation dans $Ho(s\mathcal{F}'^{(n)})$.*

En particulier, on a un isomorphisme : $\mathscr{M}_n(F_1 \boxtimes \cdots \boxtimes F_n) \simeq \mathscr{M}_1(F_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathscr{M}_1(F_n)$.

Démonstration : Il faut montrer que $\mathscr{M}_1(F_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathscr{M}_1(F_n)$ est $h\mathcal{F}'^{(n)}_n$-local et que $\boxtimes\eta_i$ est une $h\mathcal{F}'^{(n)}_n$-équivalence.

Par exactitude du produit tensoriel, on a un isomorphisme de Kunneth :
$\pi_*(\mathscr{M}_1(F_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathscr{M}_1(F_n)) \simeq \pi_*(\mathscr{M}_1(F_1)) \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_*(\mathscr{M}_1(F_n))$.
Ceci assure que $\mathscr{M}_1(F_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathscr{M}_1(F_n)$ est $h\mathcal{F}'^{(n)}_n$-local.

Pour montrer que $\boxtimes\eta_i$ est une $h\mathcal{F}'^{(n)}_n$-équivalence, il suffit, par composition, de montrer que chaque :

$$Id \boxtimes \eta_i \boxtimes Id : (\boxtimes_{j=1}^{i-1} \mathscr{M}_1(F_j)) \boxtimes F_i \boxtimes (\boxtimes_{j=i+1}^{n} F_j) \longrightarrow (\boxtimes_{j=1}^{i-1} \mathscr{M}_1(F_j)) \boxtimes \mathscr{M}_1(F_i) \boxtimes (\boxtimes_{j=i+1}^{n} F_j)$$

est une $h\mathcal{F}'^{(n)}_n$-équivalence. Soient F dans $s\mathcal{F}'$ et G dans $s\mathcal{F}'^{(n-1)}$. Par exactitude du produit tensoriel, on a une suite de cofibration :

$$\mathscr{A}_1(F) \boxtimes G \longrightarrow F \boxtimes G \longrightarrow \mathscr{M}_1(F) \boxtimes G$$

et on est donc ramené à montrer que $\mathscr{A}_1(F) \boxtimes G$ est $h\mathcal{F}'^{(n)}_n$-acyclique. Par récurrence sur le squelette, il suffit de vérifier que $\mathscr{A}_1(F) \boxtimes G$ est $h\mathcal{F}'^{(n)}_n$-acyclique en chaque degré. Or, comme $\mathscr{A}_1(F)$ peut-être supposé diagonalisable en chaque degré, $\mathscr{A}_1(F) \boxtimes G$ peut-être supposé dans l'image du foncteur $(\Delta_2 \times Id)^*$. En utilisant la paire d'adjoints $((\Delta_2 \times Id)^*, \Pi_{n+1} \circ (\nabla_2 \times Id)^*)$ considérée au chapitre 2 (proposition 1.3), les arguments de la démonstration de la proposition 1.6 du chapitre 2 assurent que $\mathscr{A}_1(F) \boxtimes G$ est bien $h\mathcal{F}'^{(n)}_n$-acyclique. □

Remarque : La proposition ci-dessus implique en particulier que : $\bar{P}^{\boxtimes n} \to (Q^{(1)})^{\boxtimes n}$ est une $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-équivalence, soit $(Q^{(1)})^{\boxtimes n} = \mathscr{M}_n(\bar{P}^{\boxtimes n})$ dans $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$. En effet, d'après le corollaire 2.10 du chapitre 2, le foncteur oubli reflète la localisation. Comme $(Q^{(1)})^{\boxtimes n}$ est cofibrant, ceci justifie le choix $Q^{(n)} = (Q^{(1)})^{\boxtimes n}$ fait à la section 4.1.2.

Corollaire 4.2.2 *On a un isomorphisme Σ_n-équivariant d'algèbres graduées : $\mathcal{A}_*^{(n)} \simeq \mathcal{A}_*^{\otimes n}$, où le groupe Σ_n agit par permutation des facteurs.*

Démonstration : Comme, par définition, $Q^{(n)} = (Q^{(1)})^{\boxtimes n}$, la tensorisation des morphismes induit une flèche :

$$(R^{(1)})^{\otimes n} = (Map(Q^{(1)}, Q^{(1)}))^{\otimes n} \longrightarrow Map(Q^{(n)}, Q^{(n)}) = R^{(n)}$$

La compatibilité de la tensorisation avec la composition des morphismes montre que celle-ci est un morphisme d'anneaux simpliciaux. L'anneau simplicial $R^{(n)}$ étant muni de l'action de Σ_n induite par la structure de foncteur symétrique de $Q^{(n)} = (Q^{(1)})^{\boxtimes n}$ décrite au chapitre 3, et $(R^{(1)})^{\otimes n}$ de l'action de Σ_n obtenue par permutation des facteurs, ce morphisme est également Σ_n-équivariant. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(Map(Q^{(1)}, Q^{(1)}))^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d] & (Map(\bar{P}, Q^{(1)}))^{\otimes n} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (Q^{(1)}(A))^{\otimes n} \arrow[d, "="] \\
Map(Q^{(n)}, Q^{(n)}) \arrow[r] & Map(\bar{P}^{\boxtimes n}, Q^{(n)}) \arrow[r, "\sim"] & Q^{(n)}(A, ..., A)
\end{tikzcd}$$

Les deux flèches verticales de gauche sont données par la tensorisation des morphismes. Les deux flèches horizontales de gauche sont induites par les $h\mathcal{S}'^{(n)}_n$-équivalences : $\bar{P}^{\boxtimes n} \to Q^{(n)}$. D'après le lemme 3.4 du chapitre 3, et par la formule de Kunneth pour la flèche du haut, ce sont donc des équivalences faibles, car, pour tout n, $Q^{(n)}$ est cofibrant. Le morphisme : $(R^{(1)})^{\otimes n} \longrightarrow R^{(n)}$ est ainsi une équivalence faible, et induit l'isomorphisme annoncé. $\square$

4.3 Foncteurs exponentiels

4.3.1 Définition et exemples

Définition : [FFSS] Un foncteur exponentiel de $\mathcal{F}$ est la donné d'un foncteur gradué $E = (E^i)_{i\in\mathbb{N}}$, d'un isomorphisme gradué dans $\mathcal{F}^{(2)}$: $\nabla_2^*(E) \simeq E \boxtimes E$ et d'un isomorphisme $E^0 \simeq A$.

En particulier, on a pour tout $i > 0$: $E^i(0) = 0$.

On a : $cr_n(E) \simeq \tilde{E}^{\boxtimes n}$, où $\tilde{E} = E/E(0)$. La proposition 4.2.1 donne l'isomorphisme : $\mathscr{M}_n(cr_n(E)) \simeq (\mathscr{M}_1(\tilde{E}))^{\boxtimes n}$ dans $Ho(s\mathcal{S}'^{(n)})$. Avec le corollaire 4.2.2, ceci induit un isomorphisme : $\pi_*(\mathscr{M}_n(cr_n(E)))(A, ..., A) \simeq (\pi_*^{st}(E))^{\otimes n}$ faisant correspondre à la structure de $\mathcal{A}_*^{(n)}$-module de $\pi_*(\mathscr{M}_n(cr_n(E)))(A, ..., A)$ la structure de $\mathcal{A}_*^{\otimes n}$-module de $(\pi_*^{st}(E))^{\otimes n}$.

L'algèbre extérieure, l'algèbre symétrique et l'algèbre à puissance divisée fournissent des exemples de foncteurs exponentiels gradués, notés respectivement : Λ^*, S^* et Γ^*.

4.3.2 Décalages et annulations

Proposition 4.3.1 *[Q2, I] Pour tout $d \geq n \geq 1$, on a deux isomorphismes de $\mathcal{A}_*$-module (resp.$\mathcal{A}_*^{(1,d)}$-module) :*

$$\pi_*^{st}(\Lambda^n) \simeq \Sigma^{n-1}\pi_*^{st}(S^n) \quad \textit{et} \quad \pi_*^{st}(\Gamma^n) \simeq \Sigma^{n-1}\pi_*^{st}(\Lambda^n).$$

Démonstration : Soit le complexe de Koszul exact :

$$0 \to \Lambda^n \to \Lambda^{n-1} \otimes S^1 \to \cdots \to \Lambda^{n-i} \otimes S^i \to \cdots \to \Lambda^1 \otimes S^{n-1} \to S^n \to 0$$

En lui appliquant le foncteur stabilisation, on obtient le complexe exact de $s\mathcal{F}'$:

$$0 \to st(\Lambda^n) \to st(\Lambda^{n-1} \otimes S^1) \to \cdots \to st(\Lambda^{n-i} \otimes S^i) \to \cdots \to st(\Lambda^1 \otimes S^{n-1}) \to st(S^n) \to 0$$

Pour $1 < i < n$, le foncteur $\Lambda^{n-i} \otimes S^i = \Delta_2^*(\Lambda^{n-i} \boxtimes S^i)$ est diagonalisable, d'où $st(\Lambda^{n-i} \otimes S^i) \simeq 0$ dans $Ho(s\mathcal{F}')$. On a donc un isomorphisme de $Ho(s\mathcal{F}')$: $\Sigma^{n-1} st(S^n) \simeq st(\Lambda^n)$. Son image par $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)} : Ho(s\mathcal{F}') \longrightarrow Ho(s\mathcal{M}od_A(R^{(1)}))$ est l'isomorphisme de $Ho(s\mathcal{M}od_A(R^{(1)}))$: $\Sigma^{n-1} st(S^n)(A) \simeq st(\Lambda^n)(A)$ qui induit le premier isomorphisme de la proposition.

Le second isomorphisme s'obtient de la même manière à partir du complexe de Koszul dual. □

Proposition 4.3.2 *[DP, 10.9, p.294] Soit un entier premier $p > 0$. Si le corps A est de caractéristique p, on a : $\pi_*^{st}(\Gamma^n) \simeq \pi_*^{st}(\Lambda^n) \simeq \pi_*^{st}(S^n) \simeq 0$ dès que n n'est pas une puissance de p.* □

4.4 Calculs

A compter de cette section, on se restreint au cas du corps $\mathbb{F}_2$.

4.4.1 L'algèbre $\mathcal{A}_*$

On rappelle brièvement certaines constructions de [I, Br], dont on utilise quelques résultats.

Pour tout $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels V, W, le morphisme : $V \oplus W \to P(V \otimes W)$, où $P = \mathbb{F}_2[-]$, défini par : $(v, w) \mapsto [v \otimes w]$, induit une flèche : $P(V) \otimes P(W) \to P(V \otimes W)$, qui se restreint en un morphisme, naturel en V et en W : $\bar{P}(V) \otimes \bar{P}(W) \to \bar{P}(V \otimes W)$.

On désigne par $\bar{P}^{d+1}$ le foncteur $(d+1)$-puissance de l'idéal d'augmentation. On a une suite exacte courte [Pi] :

$$0 \to \bar{P}^{d+1} \to \bar{P} \to m_d(\bar{P}) \to 0$$

On obtient, par le passage au quotient, un morphisme naturel en V et en W : $m_d(\bar{P})(V) \otimes m_d(\bar{P})(W) \to m_d(\bar{P})(V \otimes W)$.

D'après [Br, p.70], ces flèches induisent les multiplications : $st(\bar{P})(\mathbb{F}_2) \otimes st(\bar{P})(\mathbb{F}_2) \to st(\bar{P})(\mathbb{F}_2)$ et $st(m_d(\bar{P}))(\mathbb{F}_2) \otimes st(m_d(\bar{P}))(\mathbb{F}_2) \to st(m_d(\bar{P}))(\mathbb{F}_2)$, compatible avec le morphisme $st(\bar{P}) \to st(m_d(\bar{P}))$.

Théorème 4.4.1 *[S] Le morphisme $R^{(1)} = Map(Q^{(1)}, Q^{(1)}) \to st(\bar{P})(\mathbb{F}_2)$ (resp. $R^{(1,d)} = Map(Q^{(1,d)}, Q^{(1,d)}) \to st(m_d(\bar{P}))(\mathbb{F}_2)$) est un morphisme d'anneaux simpliciaux, et une équivalence faible.*

Proposition 4.4.2 *L'algèbre $\mathcal{A}_* = \pi_*(R^{(1)})$ est l'algèbre duale de l'algèbre de Steenrod.*

En particulier, d'après [M], l'algèbre $\mathcal{A}_*$ est isomorphe à l'algèbre polynômiale graduée $\mathbb{F}_2[\xi_0, \xi_1, ..., \xi_i, ...]$, où ξ_i est de degré $\mid \xi_i \mid = 2^i - 1$ et $\xi_0 = 1$.

Démonstration : D'après le théorème précédent, on a un isomorphisme : $\mathcal{A}_* \simeq \pi_*^{st}(\bar{P})$ d'anneaux gradués. Comme $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ est un n-ième espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{F}_2; n)$, on a $\pi_*(\bar{P}(\Sigma^n\mathbb{F}_2)) \simeq \tilde{H}_*(K(\mathbb{F}_2;n))$ où $\tilde{H}_*$ désigne l'homologie réduite à coefficient dans $\mathbb{F}_2$. D'où : $\pi_*^{st}(\bar{P}) \simeq Colim_n \pi_{*+n}(B^n\bar{P}) \simeq Colim_n \tilde{H}_{*+n}(K(\mathbb{F}_2;n))$, l'algèbre duale de l'algèbre de Steenrod. La vérification, plus délicate, de la compatibilité de cet isomorphisme avec les structures produits est détaillée dans [Br]. □

4.4.2 L'algèbre $\mathcal{A}_*^{(1,d)}$ et le module $\pi_*^{st}(\Lambda^*)$

On a un diagramme d'anneaux simpliciaux :

$$R^{(1)} \to st(\bar{P})(\mathbb{F}_2) \to st(m_d(\bar{P}))(\mathbb{F}_2) \leftarrow R^{(1,d)}$$

où les flèches de droite et de gauche sont des équivalences faibles. Au niveau des groupes d'homotopies, on obtient un morphisme d'algèbres : $\mathcal{A}_* = \pi_*(R^{(1)}) \to \pi_*(R^{(1,d)}) = \mathcal{A}_*^{(1,d)}$.

Proposition 4.4.3 *Le morphisme d'algèbres graduées : $\mathcal{A}_* \to \mathcal{A}_*^{(1,d)}$ est surjectif.*

Démonstration : Il faut vérifier que $\pi_*^{st}(\bar{P}) \to \pi_*^{st}(m_d(\bar{P}))$ est surjectif. On a une suite exacte courte de $s\mathcal{F}'$:

$$0 \to st(\bar{P}^{d+1}) \to st(\bar{P}) \to st(m_d(\bar{P})) \to 0$$

Par la suite exacte longue d'homotopie associée à cette suite exacte courte, il suffit de montrer que : $\pi_*^{st}(\bar{P}^{d+1}) \to \pi_*^{st}(\bar{P})$ est injectif. Pour cela, il suffit que, pour tout n, $\pi_{*+n}(B^n\bar{P}^{d+1})(\mathbb{F}_2) \to \pi_{*+n}(B^n\bar{P})(\mathbb{F}_2)$ soit injectif, et donc que, $B^n\bar{P}^{d+1}(\mathbb{F}_2) \to B^n\bar{P}(\mathbb{F}_2)$ possède un rétract d'ensembles simpliciaux.

Pour montrer cela, on considère également $P = \mathbb{F}_2[-]$ comme foncteur de la catégorie des ensembles pointés dans celle des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels. On note encore $\bar{P}$ le noyau du morphisme : $P(-) \to P(*)$. Pour tout ensemble pointé A, on note r_A le rétract ensembliste, naturel en A, de l'injection $\bar{P}^{d+1}(\bar{P}(A)) \to \bar{P}(\bar{P}(A))$, valant 0 sur le supplémentaire de $\bar{P}^{d+1}(\bar{P}(A))$. Soit X un ensemble pointé simplicial. La naturalité du rétract r entraine que, pour tout n, r_{X_n} est compatible avec les opérateurs simpliciaux. On obtient donc un rétract d'ensemble simpliciaux r_X de l'injection $\bar{P}^{d+1}(\bar{P}(X)) \to \bar{P}(\bar{P}(X))$. Avec $X = S^n$, la n-ième sphère, et les isomorphismes $\bar{P}(S^n) \simeq \frac{\mathbb{F}_{2[S^n]}}{\mathbb{F}_{2[*]}} \simeq \Sigma^n\mathbb{F}_2$, on a ainsi un rétract d'ensembles simpliciaux r_{S^n} de l'injection : $B^n\bar{P}^{d+1}(\mathbb{F}_2) = \bar{P}^{d+1}(\Sigma^n\mathbb{F}_2) \to \bar{P}(\Sigma^n\mathbb{F}_2) = B^n\bar{P}(\mathbb{F}_2)$. □

On note $\mathcal{P}_n$ la série de Poincaré de $\pi_*^{st}(\Lambda^{2^n})$, soit $\mathcal{P}_n(X) = \sum_q dim_{\mathbb{F}_2}(\pi_q^{st}(\Lambda^{2^n}))X^q$.

Lemme 4.4.4 *Pour tout $n > 0$, on a : $\mathcal{P}_n(X) \leq \dfrac{X^{2^n-1}}{\prod_{k=1}^n(1-X^{2^k-1})}$*

Démonstration : Soit le complexe de [F, p.510] :

$$\Lambda^{2^n} \to \Lambda^{2^n-1}\otimes\Lambda^1 \to \cdots \to \Lambda^i\otimes\Lambda^{2^n-i} \to \cdots \to \Lambda^1\otimes\Lambda^{2^n-1} \to \Lambda^{2^n}$$

C'est un complexe dont l'homologie est nulle sauf en degré 2^{n-1} où elle vaut $\Lambda^{2^{n-1}}$. En lui appliquant le foncteur stabilisation, on obtient le complexe de $s\mathcal{F}'$:

$$C^{2^n} \to C^{2^n-1} \to \cdots \to C^i \to \cdots \to C^1 \to C^0$$

où $C^i = st(\Lambda^i \otimes \Lambda^{2^n-i})$. D'une part, par exactitude du foncteur stabilisation, on a $H_i(C^\bullet) \simeq 0$ pour tout $i \neq 2^{n-1}$ et $H_{2^{n-1}}(C^\bullet) = st(\Lambda^{2^{n-1}})$. D'autre part, pour $0 < i < 2^n$, C^i est diagonalisable, et donc $\pi_*^{st}(C^i) \simeq 0$. Les suites spectrales associées au bicomplexe se résument alors à la suite exacte longue :

$$\cdots \to \pi^{st}_{q+2^{n-1}}(\Lambda^{2^{n-1}}) \to \pi^{st}_q(\Lambda^{2^n}) \to \pi^{st}_{q+2^n-1}(\Lambda^{2^n}) \to \pi^{st}_{q+2^{n-1}-1}(\Lambda^{2^{n-1}}) \to \pi^{st}_{q-1}(\Lambda^{2^n}) \to \cdots$$

Soit la série $\mathcal{R}(X) = \sum r_q X^q$ où $r_q = dim_{\mathbb{F}_2}(Im(\pi^{st}_{q+2^{n-1}}(\Lambda^{2^{n-1}}) \to \pi^{st}_q(\Lambda^{2^n})))$. La suite exacte longue donne alors : $(1-X^{2^n-1})\mathcal{P}_n(X) - X^{2^{n-1}}\mathcal{P}_{n-1}(X) + (1+X)X^{2^n-1}\mathcal{R}(X) = 0$. Il s'en déduit que : $(1-X^{2^n-1})\mathcal{P}_n(X) \leq X^{2^{n-1}}\mathcal{P}_{n-1}(X)$ et donc :

$$\mathcal{P}_n(X) \leq \frac{X^{2^{n-1}}}{1-X^{2^n-1}}\mathcal{P}_{n-1}(X)$$

Comme $\mathcal{P}_0(X) = 1$, on obtient par récurrence la majoration voulue. □

Proposition 4.4.5 *L'algèbre $\mathcal{A}_*^{(1,d)} = \pi_*(R^{(1,d)})$ et le module $\pi_*^{st}(\Lambda^{2^h})$ ont pour série de Poincaré respectivement :*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}_*^{(1,d)}}(X) = \frac{1}{\prod_{k=1}^h (1-X^{2^k-1})} \quad et \quad \mathcal{P}_{\pi_*^{st}(\Lambda^{2^h})}(X) = \frac{X^{2^h-1}}{\prod_{k=1}^h (1-X^{2^k-1})}$$

où N est l'entier déterminé par : $2^N \leq d < 2^{N+1}$.

Démonstration : D'après [Pi], pour tout $d > 0$, on a une suite exacte courte :

$$0 \to \Lambda^d \to m_d(\bar{P}) \to m_{d-1}(\bar{P}) \to 0$$

qui induit une suite exacte courte dans $s\mathcal{F}'$: $0 \to st(\Lambda^d) \to Q^{(1,d)} \to Q^{(1,d-1)} \to 0$. Par la proposition 4.4.3, la suite exacte longue associée se réduit à une suite exacte courte de modules gradués :

$$0 \to \pi_*^{st}(\Lambda^d) \to \mathcal{A}_*^{(1,d)} \to \mathcal{A}_*^{(1,d-1)} \to 0$$

D'une part, les annulations de la proposition 4.3.2 impliquent les isomorphismes d'algèbres, pour tout $k = 0, ..., 2^h - 1$: $\mathcal{A}_*^{(1,2^h+k)} \simeq \mathcal{A}_*^{(1,2^h)}$. D'autre part, en notant $\mathcal{Q}_h$ la série de Poincaré de $\mathcal{A}_*^{(1,2^h)}$, on obtient : $\mathcal{Q}_h = \mathcal{P}_h + \mathcal{Q}_{h-1}$.

Soit k un entier. Par le lemme 4.4.4, on sait que $\pi_k^{st}(\Lambda^{d-1})$ est nul pour d suffisament grand par rapport à k. Pour une telle valeur de d, on a un isomorphisme : $\pi_k^{st}(m_d(\bar{P})) \to \pi_k^{st}(m_{d-1}(\bar{P}))$, et donc un isomorphisme : $\pi_{k+n}(B^n m_d(\bar{P}))(\mathbb{F}_2) \to \pi_{k+n}(B^n m_{d-1}(\bar{P}))(\mathbb{F}_2)$ pour $n > k$. Par la suite exacte courte de Milnor, on a alors, pour $n > k$, l'isomorphisme :

$$\pi_{k+n}(Lim_d\ B^n m_d(\bar{P}))(\mathbb{F}_2) \simeq Lim_d\ \pi_{k+n}(B^n m_{d-1}(\bar{P}))(\mathbb{F}_2)$$

Or : $Lim_d\ m_d(\bar{P}) \simeq \bar{P}$. D'où : $\pi_k^{st}(\bar{P}) \simeq \pi_k^{st}(m_d(\bar{P}))$ pour d suffisament grand par rapport à k.

On note $\mathcal{P}_\infty$ la série de Poincaré associée à $\mathcal{A}_* \simeq \pi_k^{st}(\bar{P})$. Comme $\mathcal{Q}_d = \sum_{h=0}^d \mathcal{P}_h$, le paragraphe précédent montre que $\mathcal{P}_\infty = \sum_{h=0}^\infty \mathcal{P}_h$, d'où :

$$\sum_{h=0}^\infty \mathcal{P}_h(X) = \frac{1}{\prod_{k=1}^\infty (1-X^{2^k-1})} = 1 + \sum_{h=1}^\infty \frac{X^{2^h-1}}{\prod_{k=1}^h (1-X^{2^k-1})}$$

Avec les inégalités du lemme 4.4.4, on tire :

$$\mathcal{P}_h(X) = \frac{X^{2^h-1}}{\prod_{k=1}^{h}(1 - X^{2^k-1})} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_h(X) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{h}(1 - X^{2^k-1})}$$

□

Corollaire 4.4.6 *[S] L'algèbre* $\mathcal{A}_*^{(1,d)} = \pi_*(R^{(1,d)})$ *est isomorphe à l'algèbre polynômiale graduée* $\mathbb{F}_2[\xi_0, \xi_1, ..., \xi_N]$ *où* N *est l'entier déterminé par :* $2^N \leq d < 2^{N+1}$*. Pour tout* $h \geq 0$*, le module* $\pi_*^{st}(\Lambda^{2^h})$ *est isomorphe au* $\mathcal{A}_*$*-module gradué* $\xi_{2^h}.\mathbb{F}_2[\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{2^h}]$*.* □

Bibliographie

[A] J.F. Adams. The selected works of J. Frank Adams, Volumes 2. Edited by J. P. May and C. B. Thomas. Cambridge : Cambridge University Press (1992).

[BP] S. Betley, T. Pirashvili. *Stable K-theory as a derived functor.* J. Pure Appl. Algebra 96, No.3, 245-2 (1994).

[Bo] M. Boekstedt. *Topological Hochschild homology.* Preprint.

[B1] A.K. Bousfield. *The localization of spaces with respect to homology.* Topology 14, 133-150 (1975).

[B2] A.K. Bousfield. *Constructions of factorization systems in categories.* J. Pure Appl. Algebra 9, 207-220 (1977).

[B3] A.K. Bousfield. *The localization of spectra with respect to homology.* Topology 18, 257-281 (1979).

[BK] A.K. Bousfield, D.M. Kan. Homotopy limits, completions and localizations. Lecture Notes in Mathematics. 304. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag (1972).

[Br] L. Breen. *Extensions du groupe additif.* Inst. Haut. Etud. Sci., Publ. Math. 48, 39-125 (1978).

[D] A. Dold. *Homology of symmetric products and other functors of complexes.* Ann. of Math., II. Ser. 68, 54-80 (1958).

[DP] A. Dold, D. Puppe. *Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen.* Ann. Inst. Fourier 11, 201-312 (1961).

[DHK] W.G. Dwyer, P. Hirshorn, D.M. Kan. Model Categories and More General Abstract Homotopy Theory. http ://www-math.mit.edu/ psh/

[DS] W.G. Dwyer, J. Spalinski. *Homotopy theories and model categories.* James, I. M. (ed.), Handbook of algebraic topology. Amsterdam : North-Holland. 73-126 (1995).

[F] V. Franjou. *Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques.* J. Algebra 179, No.2, 501-522 (1996).

[FLS] V. Franjou, J. Lannes, L. Schwartz. *Autour de la cohomologie de MacLane des corps finis.* Invent. Math. 115, No.3, 513-538 (1994).

[FP] V. Franjou, T. Pirashvili. *On the MacLane cohomology for the ring of integers.* Topology 37, No.1, 109-114 (1998).

[FS] V. Franjou, J.H. Smith. *A duality for polynomial functors.* J. Pure Appl. Algebra 104, No.1, 33-39 (1995).

[FFSS] V. Franjou, E.M. Friedlander, A. Skorichenko, A. Suslin. *General linear and functor cohomology over finite fields.* A paraître dans Ann. of Math.

[G] P. Gabriel. *Des catégories abéliennes.* Bull. Soc. Math. France 90, 323-448 (1962)

[I] L. Illusie. Complexe cotangent et deformations I,II. Lecture Notes in Mathematics. 239, 283. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag (1972).

[JMcC1] B. Johnson, R. McCarthy. *Taylor towers for functors of additve categories.* A paraître dans J. Pure Appl. Algebra.

[JMcC2] B. Johnson, R. McCarthy. *Deriving calculus with cotriples.* http ://www.math.uiuc.edu/ randy/

[JMcC3] B. Johnson, R. McCarthy. *A classification of degree n functors.* A paraitre dans : Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.

[JP] M. Jibladze, T. Pirashvili. *Cohomology of algebraic theories.* J. Algebra 137, No.2, 253-296 (1991).

[McC] J. MacCleary. User's guide to spectral sequences. Mathematics Lecture Series, 12. Wilmington, Delaware : Publish or Perish, Inc. XIII (1985).

[McL] S. MacLane. Categories for the working mathematician. Graduate Texts in Mathematics, 5. New York etc. : Springer-Verlag (1971).

[McL2] S. MacLane. *Homologie des anneaux et des modules.* Centre Belge Rech. math., Colloque de Topologie algébrique, Louvain les 11, 12 et 13 juin 1956, 55-80 (1957).

[M] J. Milnor. *The Steenrod algebra and its dual.* Ann. of Math., II. Ser. 67, 150-171 (1958).

[NT] C. Nastacescu, B. Torrecillas. *Colocalization on Grothendieck categories with applications to coalgebras.* J. Algebra 185, No.1, 108-124 (1996).

[P] N. Popescu. Abelian categories with applications to rings and modules. L.M.S. Monographs. 3. London-New York : Academic Press. XII (1973).

[Pi] L. Piriou. *Extensions entre foncteurs de la catégorie des espaces vectoriels sur le corps premier à p éléments dans elle même.* Thèse de doctorat. Université Paris VII (1995).

[Pr] T. Pirashvili. *Higher additivizations.* (en russe) Tr. Tbilis. Mat. Inst. Razmadze 91, 44-54 (1988).

[PW] T. Pirashvili, F. Waldhausen. *MacLane homology and topological Hochschild homology.* J. Pure Appl. Algebra 82, No.1, 81-98 (1992).

[Q] D.G. Quillen. Homotopical algebra Lecture Notes in Mathematics. 43. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag (1967).

[Q2] D.G. Quillen. *On the homology theory of commutative ring.* Notes multigraphiées, M.I.T.

[R] B. Richter. *Taylor towers for abelian* Γ*-groups.*

[SS] S. Schwede, B. Shipley. *Algebras and modules in monoidal model categories.* http ://hopf.math.purdue.edu/pub/Schwede-Shipley/last

[Sc] L. Schwartz. *Unstable modules over Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture.* Lectures in Mathematics. Chicago, IL : Univ. of Chicago Press (1994).

[S] J.H. Smith.

[W] C.A. Weibel. An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 38. Cambridge : Cambridge University Press (1994).